

Contrôle Continu du 8 novembre 2016

Exercice 1. Soit x un nombre réel. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2x \\ 1 & 0 & 4x^2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A .

On considère les points suivants de \mathbb{R}^3 :

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \\ 4x^2 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les points P_0, \dots, P_3 ne sont pas contenus dans un plan affine.
3. Calculer le barycentre des points $(P_0, \frac{1}{4})$, $(P_1, \frac{1}{4})$, $(P_2, \frac{1}{4})$ et $(P_3, \frac{1}{4})$.

Exercice 2. Soient A_1, A_2 deux points distincts de \mathbb{R}^2 . Pour $i = 1, 2$ on considère l'application $h_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$h_i(A_i + v) = A_i + \frac{1}{2}v.$$

1. Pour $i = 1, 2$, montrer que h_i est affine et déterminer sa partie linéaire.
2. Déterminer la partie linéaire de l'application composée $h_3 = h_2 \circ h_1$.
3. Montrer que h_3 a un point fixe A_3 situé sur la droite (A_1A_2) et il est le barycentre des points $(A_1, \frac{1}{3})$ et $(A_2, \frac{2}{3})$.

Exercice 3. Soit λ un nombre réel. On considère les matrices

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}, \quad A'_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A_λ et A'_λ en fonction de λ .

On considère les sous-espaces affines de \mathbb{R}^3 suivants :

$$\mathcal{P}_\lambda : \lambda x + y - z = 1, \\ \mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} y - 3z = -1, \\ x + (\lambda - 1)z = 1. \end{cases}$$

2. Déterminer la dimension de \mathcal{P}_λ , en fonction de λ , donner une base de son espace directeur.
3. Faire de même pour \mathcal{Q}_λ .

On se propose d'étudier l'intersection de \mathcal{P}_λ et \mathcal{Q}_λ :

$$\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} \lambda x + y - z = 1, \\ y - 3z = -1, \\ x + (\lambda - 1)z = 1. \end{cases}$$

4. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles \mathcal{P}_λ et \mathcal{Q}_λ ne se rencontrent pas. (Indication : \mathcal{P}_λ et \mathcal{Q}_λ se rencontrent si et seulement si $\text{rg}(A_\lambda) = \text{rg}(A'_\lambda)$.)
5. Pour quelles valeurs de λ les sous-espaces affines \mathcal{P}_λ et \mathcal{Q}_λ se rencontrent dans un point R_λ ? Déterminer R_λ .