

Corrigé du Contrôle Continu du 8 novembre 2016

Exercice 1. Soit x un nombre réel. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2x \\ 1 & 0 & 4x^2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A .

On considère les points suivants de \mathbb{R}^3 :

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \\ 4x^2 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les points P_0, \dots, P_3 ne sont pas contenu dans un plan affine.
3. Calculer le barycentre des points $(P_0, \frac{1}{4})$, $(P_1, \frac{1}{4})$, $(P_2, \frac{1}{4})$ et $(P_3, \frac{1}{4})$.

Solution.

1. En développant par rapport à la deuxième colonne on a :

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 4x^2 \end{pmatrix} = -(4x^2 - 2x) = -4x(x - \frac{1}{2}).$$

2. Les points P_0, \dots, P_3 sont contenus dans un plan affine si et seulement si les vecteurs

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_0P_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \\ 4x^2 \end{pmatrix},$$

sont linéairement dépendants. Cela se produit si et seulement si le déterminant de A s'annule, i.e. $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$. Autrement dit, les points P_0, \dots, P_3 ne sont pas contenu dans un plan affine si et seulement si $x \neq 0, \frac{1}{2}$.

3. Le barycentre cherché est

$$\frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 2x+1 \\ 4x^2+1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Exercice 2. Soient A_1, A_2 deux points distincts de \mathbb{R}^2 . Pour $i = 1, 2$ on considère l'application $h_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$h_i(A_i + v) = A_i + \frac{1}{2}v.$$

1. Pour $i = 1, 2$, montrer que h_i est affine et déterminer sa partie linéaire.
2. Déterminer la partie linéaire de l'application composée $h_3 = h_2 \circ h_1$.
3. Montrer que h_3 a un point fixe A_3 situé sur la droite (A_1A_2) et il est le barycentre des points $(A_1, \frac{1}{3})$ et $(A_2, \frac{2}{3})$.

Solution.

1. La partie linéaire de h_i est $\phi_i := \frac{1}{2}\text{id}$. En fait, pour tout point $P \in \mathbb{R}^2$, on a

$$h_i(P) = h_i(A_i + \overrightarrow{A_iP}) = A_i + \phi_i(\overrightarrow{A_iP}),$$

ce qui montre d'ailleurs que h_i est affine.

2. D'après le cours, la partie linéaire de la composée de deux applications affines est la composée des parties linéaires. Donc,

$$\overrightarrow{h_3} = \overrightarrow{h_2} \circ \overrightarrow{h_1} = \overrightarrow{h_2} \circ \overrightarrow{h_1} = \frac{1}{4}\text{id}.$$

3. Soit G le barycentre des points $(A_1, \frac{1}{3})$ et $(A_2, \frac{2}{3})$. On vérifie qu'il est le point fixe de h_3 . Par définition de G ,

$$G = A_1 + \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{A_2A_1}.$$

En appliquant la définition de h_1 ,

$$h_1(G) = h_1(A_1 + \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A_2}) = A_1 + \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{A_2A_1}.$$

En faisant de même pour h_2 ,

$$h_3(G) = h_2(h_1(G)) = h_2(A_2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{A_2A_1}) = A_2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{A_2A_1} = G.$$

En particulier G est un point fixe de h_3 (en fait, l'unique) et il est, bien entendu, sur la droite (A_1A_2) . □

Exercice 3. Soit λ un nombre réel. On considère les matrices

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}, \quad A'_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A_λ et A'_λ en fonction de λ .

On considère les sous-espaces affines de \mathbb{R}^3 suivants :

$$\mathcal{P}_\lambda : \lambda x + y - z = 1, \\ \mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} y - 3z = -1, \\ x + (\lambda - 1)z = 1. \end{cases}$$

2. Déterminer la dimension de \mathcal{P}_λ , en fonction de λ , donner une base de son espace directeur.
3. Faire de même pour \mathcal{Q}_λ .

On se propose d'étudier l'intersection de \mathcal{P}_λ et \mathcal{Q}_λ :

$$\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} \lambda x + y - z = 1, \\ y - 3z = -1, \\ x + (\lambda - 1)z = 1. \end{cases}$$

4. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles \mathcal{P}_λ et \mathcal{Q}_λ ne se rencontrent pas. (Indication : \mathcal{P}_λ et \mathcal{Q}_λ se rencontrent si et seulement si $\text{rg}(A_\lambda) = \text{rg}(A'_\lambda)$.)
5. Pour quelles valeurs de λ les sous-espaces affines \mathcal{P}_λ et \mathcal{Q}_λ se rencontrent dans un point R_λ ? Déterminer R_λ .

Solution.

1. On étudie d'abord A_λ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2 - \lambda L_3 \rightarrow L_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda(\lambda - 1) + 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, A_λ est de rang 3 si et seulement si $\lambda(\lambda - 1) - 2 \neq 0$. Or on a $\lambda(\lambda - 1) - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$, donc $\text{rg}(A_\lambda) = 3$ si et seulement si $\lambda \neq -1, 2$. Si $\lambda = -1, 2$ alors $\text{rg}(A_\lambda) = 2$. On étudie A'_λ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2 - \lambda L_3 \rightarrow L_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda(\lambda - 1) + 2 & 2 - \lambda \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A'_λ est de rang 3 si et seulement si $\lambda \neq 2$. Si $\lambda = 2$ alors $\text{rg}(A'_\lambda) = 2$.

2. L'espace directeur P_λ de \mathcal{P}_λ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 donné par l'équation $\lambda x + y - z = 0$:

$$P_\lambda = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier \mathcal{P}_λ est de dimension 2.

3. L'espace directeur Q_λ de \mathcal{Q}_λ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 donné par les équations $y - 3z = 0$ et $x + (\lambda - 1)z = 0$:

$$Q_\lambda = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier \mathcal{Q}_λ est de dimension 1.

4. L'intersection $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est non vide si et seulement si $\text{rg}(A_\lambda) = \text{rg}(A'_\lambda)$. Cela se produit en deux cas :

$$\begin{aligned} \lambda \neq -1, 2 & : \text{rg}(A_\lambda) = \text{rg}(A'_\lambda) = 3, \\ \lambda = 2 & : \text{rg}(A_\lambda) = \text{rg}(A'_\lambda) = 2. \end{aligned}$$

En particulier \mathcal{P}_λ et \mathcal{Q}_λ se rencontrent si et seulement si $\lambda \neq -1$.

5. Supposons d'abord $\lambda \neq 2$. D'après la question (1), l'intersection $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est donnée par

$$\begin{cases} -(\lambda + 1)(\lambda - 2)z = 2 - \lambda, \\ y - 3z = -1, \\ x + (\lambda - 1)z = 1. \end{cases}$$

De la première équation on tire l'égalité :

$$z = \frac{1}{\lambda + 1},$$

et donc

$$x = 1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \quad y = \frac{3}{\lambda + 1} - 1.$$

En d'autres mots, l'intersection $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est le point

$$R_\lambda = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \\ \frac{3}{\lambda + 1} - 1 \\ \frac{1}{\lambda + 1} \end{pmatrix}.$$

Supposons $\lambda = 2$. L'intersection $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{Q}_2$ est alors donnée par le système

$$\begin{cases} y - 3z = -1, \\ x + z = 1. \end{cases}$$

C'est une droite dirigée par le vecteur $(-1, 3, 1)$. En particulier, $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ se rencontrent en un seul point si et seulement si $\lambda \neq -1, 2$. \square