

**ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
1. PRÄSENZBLATT**

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus:

$$g_1 = \text{ggT}(259, 37); \quad g_2 = \text{ggT}(945, 399).$$

(b) Finden Sie ganze Zahlen $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$, so dass

$$g_1 = x_1 \cdot 259 + y_1 \cdot 37; \quad g_2 = x_2 \cdot 945 + y_2 \cdot 399.$$

Sind diese Darstellungen eindeutig?

(c) Berechnen Sie

$$\text{kgV}(259, 37); \quad \text{kgV}(945, 399).$$

Aufgabe 2. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie:(a) Wenn $a \mid b$ und $b \mid c$ gilt, dann gilt $a \mid c$. Wenn $a \mid b$ und $b \mid a$ gilt, dann gilt $a = b$ oder $a = -b$.(b) $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a, b + ca)$.(c) $\text{ggT}(na, nb) = n \text{ggT}(a, b)$.**Aufgabe 3.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Induktion:(a) 3 teilt $n^3 + 5n$.(b) 5 teilt $11^n - 6$.**Aufgabe 4.** Die Fibonacci-Zahlen werden rekursiv definiert durch

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass $\text{ggT}(f_n, f_{n+1}) = 1 \quad \forall n \geq 0$ gilt.