# Chapitre I Introduction au langage des catégories

**Ref** chapitre I Category Theory in Context. E. Riehl
chapitres I et II Introduction au langage catégorique. I. Assem

**Motivation** Eilenberg. MacLane 1945 donner un cadre à la notion "d'isomorphisme naturel"

Naturel $V$ $k$-ev de dim finie $V \simeq V^{**}$ naturel $V \simeq V^{*}$ ne l'est pas

↳ Théorie qui permet : ① unifier les mathématiques

② Faire apparaître des liens inattendus

③ // // nouvelles questions

⋮

⚠ pas une théorie miraculeuse qui trivialise les mathématiques

## 1- Catégories et foncteurs

**Def 1.1** Une catégorie $\mathcal{E}$ est la donnée de

- Une collection de morphismes $Mor(\mathcal{E})$
- Une collection d'objets $Ob(\mathcal{E})$

telles que

(1) Tout morphisme $f \in Mor(\mathcal{E})$ a un domaine $x \in Ob(\mathcal{E})$ et un codomaine $y \in Ob(\mathcal{E})$ spécifiés.

⇝ $f : x \to y$

(2) $\forall x \in Ob(\mathcal{E})$, il existe $1_x (= Id_x) \in Mor(\mathcal{E})$

(3) $\forall$ $f : x \to y$ $g : y \to z$ il existe un morphisme $gf = (g \circ f) : x \to z$

de telle façon que

(Identité) $\forall f : x \to y \in Mor(\mathcal{E})$ on a $f 1_x = 1_y f = f$

(Associativité) $\forall f, g, h \in Mor(\mathcal{E})$ composables on a $h(gf) = (hg)f$

**Rem** ① Collection = on ne se soucie pas de la théorie des ensembles

② Si $Mor(\mathcal{E})$ est un ensemble on dit que $\mathcal{E}$ est petite

③ $\forall x, y \in Ob(\mathcal{E})$ on note $Hom_{\mathcal{E}}(x, y)$ $(= \mathcal{E}(x, y))$

la collection des morphismes $f : x \to y$ de $\mathcal{E}$

Si $\forall x, y \in \mathrm{ob}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}(x,y)$ est un ensemble, on dit que $\mathcal{E}$ est localement petite

Exemples 1.2 (Catégories concrètes)

① Ens (= Set) ob = ensembles
Mor = applications

② Top ob = espaces topologique
Mor = applications continues

③ Groupes, anneaux (unitaires asso), corps ...

④ k-ev, R-Module RMod à gauche ...
ModR à droite

Exercice ajouter des exemples

Exemples 1.3 (Catégories abstraites)

① K corps $\mathrm{Mat}_K$ ob = $\mathbb{N}$
$\mathrm{Hom}(n,m) = M_{m,n}(K)$

② G gpe $BG = \bullet_G$ objet $\{\bullet\}$
$\mathrm{Hom}(\bullet,\bullet) = G$
compo = produit de G
$\mathrm{Id}_\bullet = 1_G$

hypothèse minimale sur G pour avoir une catégorie ?

③ $(P, \leq)$ poset $\rightsquigarrow$ $\hat{P}$ obj = P
$$|\mathrm{Hom}(x,y)| = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

exercice : (1) c'est une catégorie

(2) hypothèse minimale sur $(P, \leq)$ ?

④ Htpy obj espaces topo
$$\mathrm{Hom}(x,y) = \mathrm{Hom}_{Top}(x,y) / \sim \text{homotopies}$$

Exemple 1.4 (Catégories construites à partir de catégories)

① $\mathcal{E}$ catégorie. $\mathcal{E}^{op}$ la catégorie opposée est définie par
$\mathrm{ob}(\mathcal{E}^{op}) = \mathrm{ob}(\mathcal{E})$
$\mathrm{Mor}(\mathcal{E}^{op}) = \{ f^{op} : Y \to X ;\ f : x \to y \in \mathrm{Mor}(\mathcal{E}) \}$
↳ mêmes objets et les morphismes sont obtenus en renversant les flèches.

$\mathcal{E} \rightsquigarrow \mathcal{E}^{op}$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "g"'] \arrow[dd, bend left, dashed, "fg"] \\ y \arrow[d, "f"'] \\ z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \\ y \arrow[u, "g^{op}"'] \\ z \arrow[u, "f^{op}"'] \arrow[uu, bend left, dashed, "(fg)^{op}"] \end{tikzcd} \qquad (fg)^{op} = g^{op} f^{op}$$

Ex Qu'est-ce que $(BG)^{op}$ pour $G$ gpe
$(\hat{P})^{op}$ pour $(P, \leq)$ poset

⚠ Ça paraît trivial mais... voir $(Ens)^{op}$ ? (voir TD)

② Notion de sous catégorie et produit de catégories à aller voir dans la littérature.

**Rem** En théorie des catégories les objets ne sont pas des ensembles en général, de plus ils sont relativement peu importants
↳ oblige à définir toutes les notions à l'aide "de flèches"

**Def 1.5** $\mathcal{E}$ une catégorie

① $f : x \to y \in Mor(\mathcal{E})$ est un isomorphisme s'il existe $g : y \to x$ $\in Mor(\mathcal{E})$ tel que $fg = 1_y$ et $gf = 1_x$

② $f : x \to y$ est un monomorphisme si $\forall\ w \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} x$ tels que $fg = fh$ on a $g = h$ (i.e $f$ est simplifiable à gauche)

$w \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} x \xrightarrow{f} y$

③ $f : x \to y$ est un épimorphisme si $\forall\ y \underset{l}{\overset{k}{\rightrightarrows}} z$ tq $kf = lf$ alors $k = l$ (i.e $f$ est simplifiable à droite)

⚠ mono + épi $\neq$ iso en général voir TD.

**Def 1.6** Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur (covariant) $F : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ consiste en la donnée de :

(•) $F(c) \in ob(\mathcal{D})$ $\forall\ c \in ob(\mathcal{E})$

(•) Un morphisme $F(f) : F(x) \to F(y)$ de $\mathcal{D}$ pour tout morphisme $f : x \to y$ de $\mathcal{E}$

telle que :

(1) $F(1_x) = 1_{F(x)}$

(2) $\forall f, g$ morphismes composable de $\mathcal{C}$, $F(fg) = F(f)F(g)$

Def 1.7 Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{op}$ vers $\mathcal{D}$

explicitement

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ x & \longmapsto & F(x) \\ f\downarrow & \longmapsto & \uparrow F(f) \\ y & \longmapsto & F(y) \end{array}$$

tq $F(1_x) = 1_{F(x)}$

$F(gf) = F(f)F(g)$

Exemples 1.8 (1) $\mathcal{U} : Grp \to Set$, $(G, \cdot) \mapsto G$ foncteur qui "oubli" la structure de gpe

il y a de nombreux foncteurs d'oublis plus ou moins triviaux

ex : $\mathcal{U} : Ass \to Lie$, $(A, +, \cdot) \longmapsto (A, +, [-,-])$ où $[x, y] := x.y - y.x$

le foncteur qui oublie la structure associative d'une algèbre.

(2) $F : Set \to Ab$

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & \mathbb{Z}[X] \\ f\downarrow & & \downarrow \mathbb{Z}[f] \\ Y & \longmapsto & \mathbb{Z}[Y] \end{array}$$

où $\mathbb{Z}[X]$ est le gpe abelien libre sur $X$

$\mathbb{Z}[X]$ = ensemble des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires formelles d'éléments de $X$

$\cong \mathbb{Z}^X = \{ f : X \to \mathbb{Z}$ a support fini$\}$

loi de gpe : $\left(\sum_{x \in X} \lambda_x x\right) + \left(\sum_{x \in X} \mu_x x\right) = \sum_{x \in X} (\lambda_x + \mu_x) x$

$\mathbb{Z}[f]\left(\sum_{x \in X} \lambda_x x\right) = \sum_{x \in X} \lambda_x f(x)$

(3) Si $\mathcal{C}$ est loc$^t$ petite alors $\forall x \in Ob(\mathcal{C})$ on a un foncteur covariant $Hom_{\mathcal{C}}(x, -) : \mathcal{C} \to Ens$

$$\begin{array}{ccc} y & \longmapsto & Hom_{\mathcal{C}}(x, y) \\ f\downarrow & & \downarrow f\circ - \\ z & \longmapsto & Hom_{\mathcal{C}}(x, z) \end{array}$$

$x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{f} z$

$f\alpha$

De même on a un foncteur contravariant
$\mathrm{Hom}(-,X) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ dont les détails sont à regarder ds la littérature.

↳ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$ est un bifoncteur i.e un foncteur de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Ens}$

(4) $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ deux foncteurs alors on peut définir le foncteur composé $G\circ F$ par

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & GF(x) \arrow[d, "GF(f)"] \\ y \arrow[r, mapsto] & GF(y) \end{tikzcd}$$

**Def 1.9** Soient $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, shift right, "G"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle $\eta$ de $F$ vers $G$ est la donnée de $\forall\, x \in ob(\mathcal{C})$ un morphisme $\eta_x$ de $F(x)$ ~~vers~~ $G(x)$ dans $\mathcal{D}$ tel que $\forall f : x \to y \in \mathcal{C}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(y) \arrow[r, "\eta_y"'] & G(y) \end{tikzcd}$$

commute (i.e $G(f)\eta_x = \eta_y F(f)$)

**Notation** $\eta : F \Rightarrow G$ ou encore $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\eta"] \end{tikzcd}$

**Exemple** $V \to V^{**}$, $v \mapsto ev_v$ est un iso naturelle entre $\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}$ et $DD^*$ même si il n'existe pas d'iso naturel entre $\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}$ et $D = \mathrm{Hom}_k(-,k)$.

"un iso naturel" entre Id et D serait : $\eta_V : V \to V^*$ tq

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"'] & V^* \\ W \arrow[r, "\eta_W"'] & W^* \arrow[u, "{}^t f"'] \end{tikzcd}$$

, un tel iso vérifie en particulier

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"'] & V^* \\ V \arrow[r, "\eta_V"'] & V^* \arrow[u, "{}^t f"'] \end{tikzcd}$$

donc $\eta_V = {}^t f \circ \eta_V \circ f$
et $\eta_V$ iso $\Rightarrow f$ inj (donc iso)

en particulier le carré ne commute pas si $f$ non iso.

Même en modifiant la naturalité en ne demandant celle-ci que pour $f$ iso on ne peut pas l'obtenir en général

matriciellement : 
$$\begin{tikzcd} k^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & k^n \arrow[d, "B^{-1}"] \\ k^n \arrow[r, "A'"'] & k^n \end{tikzcd}$$
on cherche $A'$ ; $A' = B^{-1}AB$ $\forall B \in GL_n(k)$

$|k| \geq 4$ impossible, $n \geq 3$ aussi ex $n = 2$ $k = \mathbb{F}_2$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

**Def 1.10** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Alors $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ($= \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$) est la catégorie dont les objets sont les foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$, les morphismes les transf. naturelles.

**Def 1.11** Une transformation naturelle $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ est un isomorphisme naturel si $\forall x \in \mathcal{C}$, $\eta_x : F(x) \to G(x)$ est un isomorphisme.

**Rem** $\begin{cases} \text{Catégories} \\ \text{Foncteurs} \\ \text{transnat} \end{cases}$ est le prototype d'une 2-catégorie (plus précisément une bicatégorie)

**Def 1.12** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Une équivalence de catégorie entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est la donnée de

① Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$

② Un isomorphisme naturel $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ et $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$

où $1_{\mathcal{C}}$ et $1_{\mathcal{D}}$ sont les foncteurs identités de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$

**Rem** (1) $G$ est appelé équivalence quasi-inverse de $F$

(2) Si $F$ et $G$ sont contravariants on parle de dualité

(3) Si deux catégories sont équivalentes toute propriété exprimable en terme de flèche est préservée.

**Def 1.13** : Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Alors

① $F$ est fidèle si $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Fx, Fy)$, $f \mapsto F(f)$ est injective

② $F$ est plein si $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ $f \mapsto F(f)$ est surjective

3 $F$ est essentiellement surjective si $\forall Y \in ob(\mathcal{D})$ $\exists X \in ob(\mathcal{C})$ tq $F(X) \simeq Y$ dans $\mathcal{D}$.

⚠ fidèle $\neq$ injectif sur les objets, penser aux foncteurs d'oubli

**Thm 1.14** Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Alors $F$ est une équivalence de catégories ssi $F$ est pleinement fidèle et essentiellement surjectif

démo : $\Rightarrow$ $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ $\quad \varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$

- alors $\forall D \in \mathcal{D}$ on a $FG(D) \xrightarrow[\varepsilon_D]{} D$ iso donc $F$ ess surjective
- On construit une bijection inverse à $F : \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(F(X),F(Y))$

$$f \longmapsto F(f)$$

$$\phi : \mathrm{Hom}(F(X),F(Y)) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}(GFX, GFY) \to \mathrm{Hom}(X,Y)$$

$$\alpha \longmapsto G(\alpha) \longmapsto X \xrightarrow{\eta_X} GFX \xrightarrow{G(\alpha)} GFY \xrightarrow{\eta_Y^{-1}} Y$$

pour $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ on a $\phi \circ F(f)$ :

$$X \xrightarrow{\eta_X} GFX \xrightarrow{GF(f)} GFY \xrightarrow{\eta_Y^{-1}} Y \qquad \text{d'où } \phi F(f) = f$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & GFX \arrow[d, "GF(f)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & GFY \end{tikzcd}$$

↳ $F$ est injective fidèle et dualement $G$ est fidèle

- $f \in \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ $\quad F \circ \phi(f) = f$ ?

$$\alpha = \phi(f) : X \xrightarrow{\eta_X} GF(X) \xrightarrow{G(f)} GF(Y) \xrightarrow{\eta_Y^{-1}} Y$$

On a donc un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & GF(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & GF(Y) \end{tikzcd}$$

et comme $\eta$ est naturelle on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & GF(X) \arrow[d, "GF(\alpha)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & GF(Y) \end{tikzcd}$$

puisque $\eta_X$ et $\eta_Y$ sont des isos on a $GF(\alpha) = G(f)$ et $G$ fidèle donne $F(\alpha) = F \circ \phi(f) = f$.

$\Leftarrow$ On suppose $F$ pleinement fidèle et ess surjectif et on construit $G$ :

sur les objets : $\forall D \in \mathcal{D}$, $\exists x \in \mathcal{E}$ et $\psi_D : D \xrightarrow{\sim} F(x)$. On pose alors $G(D) = x$ pour un choix de $x$

sur les morphismes

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\psi_D", "\sim"'] \arrow[d, "\alpha"'] & F(G(D)) \arrow[d, dashed, "\exists !"] \\ D' \arrow[r, "\psi_{D'}", "\sim"'] & F(G(D')) \end{tikzcd}$$

comme $F$ est plein$^t$ fidèle $\exists !\ G(\alpha) \in Hom_{\mathcal{E}}(G(D), G(D'))$ ; $FG(\alpha)$ fait commuter le diag.

① $G$ est un foncteur

② $G$ est une equiv inverse de $F$

pour les details voir la littérature

Ex ① $Vect_K \simeq Mat_K$

② Mq ens la catégorie des ensembles finis est equivalente à une petite catégorie. On dit que ens a un petit squelette

Pour Ens la catégorie de tous les ensembles ce n'est pas le cas.