Chapitre 2 — Propriétés universelles

Ref Assem Chap III, IV, V

Riehl Chap 2, 3, 4

Motivation $f : G \to H$ $\exists!\, \bar f : G/_{\ker f} \to H$;
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/_{\ker f} \arrow[ur, dashed, "\bar f"'] \end{tikzcd}$$

↳ cas particulier de E ensemble, R relation d'équivalence $f : E \to X$

si $\forall\, x R y$ on a $f(x) = f(y)$ alors $\exists!\, \bar f : E/_R \to X$; $f = \bar f \circ \pi$

I – Objets initiaux et finaux

Def 2.1 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet initial (resp. final) de $\mathcal{C}$ est un objet $c \in \mathcal{C}$ tq $\forall\, d \in \mathcal{C}$ $|Hom_{\mathcal{C}}(c,d)| = 1$ (resp $|Hom_{\mathcal{C}}(d,c)| = 1$).

Prop 2.2 Ces objets, s'ils existent, sont unique à unique isomorphisme près

démo : si c, c' sont deux objets initiaux alors
$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\exists!\alpha"] \arrow[rr, dashed, bend right] & c' \arrow[r, "\exists!\beta"] & c \end{tikzcd}$$
$\beta \circ \alpha = Id_c$ par unicité □

Exemples : ① $\emptyset$ est initial dans Ens et tout singleton est final

② $\{0\}$ est initial et final ds RMod

③ La catégorie des corps n'a pas d'objets initial ni final.

(penser à la caractéristique)

Def 2.3 ① $F : \mathcal{C} \to Set$ un foncteur (covariant). La catégorie des objets de F notée par $\int F$ est la cat dont les objets sont (c, x) ; $c \in Ob(\mathcal{C})$ et $x \in F(c)$. Les morphismes sont :

$f : (c, x) \to (c', x')$ ssi $f \in Hom_{\mathcal{C}}(c, c')$; $F(f)(x) = x'$

Il y a un foncteur d'oubli $\Pi : \begin{cases} \int F \to \mathcal{C} \\ (c,x) \mapsto c \end{cases}$

② Si F est contravariant on pose $\int F$ ob (c,x) ; $c \in \mathcal{E}$, $x \in F(c)$

$\mathrm{Hom}((c,x),(c',x')) = \{ f : c \to c' ;\ F(f)(x') = x \}$

On a un foncteur d'oubli $\pi : \int F \to \mathcal{E}$.

Ex R rel d'équiv sur E $\quad F : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}$

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & F(X) = \{ f : E \to X ;\ xRy \Rightarrow f(x) = f(y) \} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \circ - \\ Y & \longmapsto & F(Y) \end{array}$$

$\int F$ a pour objets $(X, E \xrightarrow{f} X$ f compatible à $R)$

Morp $(X,f) \to (X',f') = \{ g : X \to X' ;\ \underbrace{F(g)(f)}_{g \circ f} = f' \}$

c-à-d les $g : X \to X'$ qui font commuter

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & X' \\ X \arrow[ur, "g"'] \end{tikzcd}$$

proj can

$(E/_R, \pi)$ est un objet initial de $\int F$.

II - Foncteurs représentables

Def 2.4 Soit $\mathcal{E}$ une catégorie localement petite. $F : \mathcal{E} \to \mathrm{Ens}$ un foncteur

(1) F est représentable s'il existe $c \in \mathcal{E}$ un objet et un iso naturel entre F et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c,-)$ $\quad$ ($\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,c)$ si F contravariant)

(2) Une représentation de F est la donnée de $c \in \mathcal{E}$ et d'un iso naturel $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c,-) \Rightarrow F$ $\quad$ ($\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,c) \simeq F$)

Exemple (•) $\mathcal{U} : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ le foncteur d'oubli est représenté par le gpe $(\mathbb{Z},+)$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gpe}}(\mathbb{Z}, G) & \simeq & \mathcal{U}(G) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha(1) \\ \langle g \rangle \mapsto g & \longleftarrow & g \end{array}$$

(•) $\mathcal{U} : \mathrm{Ring} \to \mathrm{Ens}$ qui oublie la structure d'anneau est représenté par $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$ ...

Question comment définir $\alpha : Hom_{\mathcal{E}}(c,-) \Rightarrow F$?

Thm 2.5 [Lemme de Yoneda] Soit $F : \mathcal{E} \to Set$ foncteur avec $\mathcal{E}$ loc petite et $c \in Ob(\mathcal{E})$. Alors

$$Hom_{Fun(\mathcal{E}, Set)}(\mathcal{E}(c,-), F) \simeq F(c)$$
$$\alpha \longmapsto \alpha_c(Id_c)$$

De plus cette isomorphisme est naturel en c et en F

Démo : (•) Soit $\alpha : \mathcal{E}(c,-) \Rightarrow F$. Alors pour $x \in \mathcal{E}$ on a

$$\alpha_x : \mathcal{E}(c,x) \to F(x)$$
$$f \longmapsto \alpha_x(f)$$

. $f : c \to x$ induit un diag

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "\mathcal{E}(c,f)"'] & F(c) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathcal{E}(c,x) \arrow[r, "\alpha_x"'] & F(x) \end{tikzcd}$$

commutatif.

En Id_c on a $F(f)(\alpha_c(Id_c)) = \alpha_x(\mathcal{E}(c,f)(Id_c)) = \alpha_x(f)$

donc α est déterminé par $\alpha_c(Id_c)$ et donc $\alpha \longmapsto \alpha_c(Id_c)$ injective

(•) $e \in F(c) \rightsquigarrow \alpha : Hom(c,-) \Rightarrow F$ par

$$\alpha_x : Hom(c,x) \to F(x)$$
$$f \longmapsto F(f)(e)$$

à vérifier (•) α est bien une transformation naturelle et $\alpha_c(Id_c) = F(Id)(e) = e$.

(•) Naturalité

∎

Rem il y a une version pour les foncteurs contravariants.

Coro 2.6 [Plongement de Yoneda]

Les foncteurs $y : \mathcal{E} \to Fun(\mathcal{E}^{op}, Set)$ et $y : \mathcal{E}^{op} \to Fun(\mathcal{E}, Set)$

$$c \longmapsto Hom(-,c) \qquad\qquad c \longmapsto Hom(c,-)$$
$$f\downarrow \quad \downarrow f_* = f\circ - = \mathcal{E}(-,f) \qquad\qquad f\downarrow \quad \uparrow f^* = -\circ f$$
$$d \longmapsto Hom(-,d) \qquad\qquad d \longmapsto Hom(d,-)$$

$\mathcal{E}(f,-)$

sont des plongements pleinement fidèles

<u>démo</u> : • il faut vérifier que f_* est une trans naturelle et que y est un foncteur...

$\circledast$ Yoneda

• On a $\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(c,d) \to \operatorname{Hom}(y_c, y_d) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(c,d)$
$f \longmapsto f_* \longmapsto (f_*)_c(\mathrm{Id}_c) = f$

donc $f \mapsto f_*$ est injective car $f_* = g_* \Rightarrow f = g$ by $\circledast$

De plus si $f \in \operatorname{Hom}(c,d)$ via Yoneda on a une trans nat α_f qui est juste f_*

$c \xrightarrow{f} c' \xrightarrow{g} c$
$\mathcal{E}(f,-)$ $\mathcal{E}(g,-)$
iso of foncteurs
<u>Conv</u> $\alpha : \mathcal{E}(c,-) \Rightarrow \mathcal{E}(c',-)$
$\alpha = \mathcal{E}(f,-)$ $\alpha\beta = \mathrm{Id}$ $\Rightarrow fg = \mathrm{Id}$...
$\beta = \mathcal{E}(g,-)$

• Si $y_c \simeq y_{c'}$ alors $\exists\, \alpha : y_c \Rightarrow y_{c'}$ $\beta : y_{c'} \Rightarrow y_c$ tq $\alpha \circ \beta = 1_{y_{c'}}$ et $\beta \circ \alpha = 1_{c'}$ en passant à Yoneda on a $c \simeq c'$. $\square$

<u>Coro 2.7</u> Si c et c' représentent le même foncteur, ~~alors~~ ils sont isomorphes

<u>Objet universelle II</u> :
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & x \\ E/R \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$F : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}$
$x \longmapsto F(x) = \{ E \xrightarrow{f} x \,;\, f \text{ comp à } R\}$

alors $q \in F(E/R)$ induit une transformation naturelle
$\operatorname{Hom}_{\mathrm{Ens}}(E/R, -) \xrightarrow{\sim} F$ via le lemme de Yoneda

<u>Def 2.8</u> Soit $F : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ un foncteur et $x \in \mathcal{D}$.
On appelle problème universel posé par F et x la question
$\mathcal{D}(x, F(-)) : \mathcal{E} \to \mathrm{Ens}$ est-il représentable ?
Une solution est la donnée de $C_x \in \mathcal{E}$ et $i_x \in \mathcal{D}(x, F(C_x))$ qui induit un isomorphisme $\mathcal{E}(C_x, -) \Rightarrow \mathcal{D}(x, F(-))$ via le lemme de Yoneda.

En diag: $\forall z \in \mathcal{E}$ et $f : x \to F(z) \in \mathcal{D}$ $\exists!\, \alpha \in \mathcal{E}(C_x, z)$ tq
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_x"'] & F(z) \\ F(C_x) \arrow[ur, "\exists!\, F(\alpha)"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \end{tikzcd}$$

On peut aussi se poser la question : $\mathcal{D}(F(-),x)$ est-il representable ?
une solution : $C_x \in \mathcal{E}$ $p_x \in \mathcal{D}(F(C_x),x)$; p_x induit un iso
$$\mathcal{E}(-,C_x) \simeq \mathcal{D}(F(-),x)$$

en diag $\forall z \in \mathcal{E}$ $g : F(z) \to x$ $\exists!\ \alpha : z \to C_x$;

$$\begin{tikzcd} F(C_x) \arrow[r, "p_x"] & x \\ F(z) \arrow[u, dashed, "F(\alpha)"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

II - Foncteurs adjoints

Def due à Daniel Kan 1958

<u>Def 2.9</u> Une adjonction est un couple (G,D) de foncteurs $G : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ et ~~D~~ $D : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ avec un isomorphisme $\mathcal{D}(G(c),d) \simeq \mathcal{E}(c,Dd)$ $\forall c \in \mathcal{E}$ et $d \in \mathcal{D}$ qui est naturel en chaque variable

<u>Rem</u> $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ loc petits alors on demande $\mathcal{D}(G-,-) \simeq \mathcal{E}(-,D(-))$ en tant que foncteurs $\mathcal{E}^{op} \times \mathcal{D} \to Set$

<u>Notation</u> $G \dashv D$ et on dit que G est un adjoint à gauche de D
D " " droite de G

En fixant $c \in \mathcal{E}$ on a $\mathcal{D}(Gc,-) \simeq \mathcal{E}(c,D(-))$ donc Gc représente le foncteur $\mathcal{E}(c,D(-))$. Par le lemme de Yoneda cet iso est donné par $\eta_c : c \to DGc$ qui correspond à Id_{Gc}.

De même en fixant $d \in \mathcal{D}$ $\mathcal{D}(G-,d)$ est représenté par $\mathcal{E}(-,Dd)$. Un tel iso est donné par $\varepsilon_d : \mathcal{D}(GDd,d)$ qui correspond à Id_{Dd}.

<u>Lem/Def 2.10</u> Soit $\mathcal{E} \underset{D}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ une adjonction. Alors $(\eta_c)_c : 1_{\mathcal{E}} \Rightarrow DG$ et $(\varepsilon_d)_d : GD \Rightarrow Id_{\mathcal{D}}$ sont des transformations naturelles

appelées <u>unité</u> et <u>co-unité</u> de l'adjonction.

<u>Prop 2.11</u> Soit $\mathcal{E} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ deux foncteurs. Alors $F \dashv G$ ssi il existe des transformations naturelles $\eta : 1_{\mathcal{E}} \Rightarrow GF$ et $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ telles que

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "F\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "I_F"'] & FGF \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\eta G"] \arrow[dr, Rightarrow, "I_G"'] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

commutent.

Ici $F\eta$, εF etc sont des transformations naturelles définies "comme on croit" ("whiskering") i.e $(F\eta)_d = F(\eta_d)$ $(\varepsilon F)_d = \varepsilon_{F(d)}$

<u>démo</u> Voir Riehl 4.2.6
Assem 3.7

<u>Exemples</u> ① Les foncteurs d'oublis ont généralement un adjoint à gauche du type libre + oubli.

$\mathcal{U} : Ab \to Set$ $\quad L : Set \to Ab$, $X \mapsto \mathbb{Z}[X]$ alors $L \dashv \mathcal{U}$

$\mathcal{U} : Ab \to Gpe$ $\quad Ab : Gpe \to Ab$, $G \mapsto G/_{[G,G]}$ $\quad Ab \dashv \mathcal{U}$

② $\mathcal{U} : Top \to Set$ a un adjoint à droite et à gauche

$L : Set \to Top$, $X \mapsto (X, ?)$ $\qquad D : Set \to Top$, $X \mapsto (X, ?)$

$L(X) = (X, \mathcal{P}(X))$ X avec la topologie discrète (la plus fine)

$D(X) = (X, \{\emptyset, X\})$ X avec la topologie trivial (la moins fine)

on

<u>Thm ~~Déf~~ 2.12</u> Soit $F : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Alors LASSE

(1) F admet un adjoint à gauche

(2) $\forall X \in \mathcal{D}$, le foncteur $\mathcal{E}(X, F(-))$ ~~...~~ : $\mathcal{E} \to Ens$ est représentable

(3) $\forall X \in \mathcal{D}$, il existe $(\mathcal{D}_X, i_X)$ une solution univ du problème posé par X rel à $\mathcal{D}$