Et on a une version duale pour les adjoints à droite

<u>Morale</u> problèmes universels = adjoints !

<u>Rem</u> (1) Pour retrouver le cas de $F : \mathcal{C} \to Ens$ plus haut on peut voir que si F est représentable, alors le foncteur $Ens(*, F(-)) \simeq F(-)$ est représentable.

(2) Il y a des conditions qui garantissent l'existence de foncteurs adjoints

<u>Thm</u> $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre catégories localement présentables

(1) F admet un adjoint à droite ssi il est cocontinu

(2) F " " à gauche ssi il est continu

(There is a small set of small objects tq every object is a nice colimit of objects in this set). Ex $\mathcal{C} = \mathcal{D} =$ modules sur un anneau.

<u>IV (Co)limites</u>

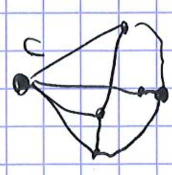
Def 2.13 Un diagramme de forme $\mathcal{J}$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur de $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ où $\mathcal{J}$ est une petite catégorie

<u>Ex</u> $\mathcal{J} = 2 \times 2 =$
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$
alors un foncteur de $\mathcal{J}$ ds $\mathcal{C}$ est la donnée d'un diag. commutatif
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & B \arrow[d, "b"] \\ C \arrow[r, "d"'] & D \end{tikzcd}$$
ds $\mathcal{C}$

$c \in \mathcal{C}$
$\Delta(c)$ constant at c
$\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} Fun(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ foncteur
$c \longmapsto \Delta(c)$
sommet

Def 2.14 Un cône au dessus d'un diag $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ de sommet $c \in \mathcal{C}$ est une transformation naturelle $\lambda : c \Rightarrow F$ du foncteur constant à c vers F

↳ $\forall j \in \mathcal{J}$ $\lambda_j : c \to F(j)$ et $\forall f : i \to j$ on a
$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "\lambda_i"'] \arrow[dr, "\lambda_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$
qui commute.



Dual^t un cone sous F (ou cocone) de sommet c est une transf naturelle $\lambda : F \Rightarrow c$.

Def 2.14 Soit $F : \mathcal{J} \to \mathcal{E}$ un diagramme. Alors une limite de F (= limite projective, limite inverse) est un cone universel (final) au dessus de F. Une colimite de F (= limite injective, limite directe) est un cone universel sous F (initial)

Concrètement : $\Delta : \mathcal{E} \to Fun(\mathcal{J}, \mathcal{E})$
$c \longmapsto \Delta c$ foncteur constant

$F : \mathcal{J} \to \mathcal{E}$ un diag, alors une limite de F est un couple $(\lim F, \phi)$ où $\lim F \in \mathcal{E}$ et $\phi : \Delta_{\lim F} \Rightarrow F$ tq
$\forall x \in \mathcal{E}, \forall\ \lambda : \Delta_x \Rightarrow F$ il existe un unique $f : x \to \lim F$ tq

$$\begin{tikzcd} \Delta_{\lim F} \arrow[r, Rightarrow, "\phi"] & F \\ \Delta_x \arrow[u, Rightarrow, "\Delta f"] \arrow[ur, Rightarrow, "\lambda"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{i.e } \forall j \in \mathcal{J} \qquad \begin{tikzcd} \lim F \arrow[r, "\phi_j"] & F(j) \\ x \arrow[u, "\exists f"] \arrow[ur, "\lambda_j"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

c.à.d $\mathcal{E}(-, \lim F) \simeq \underset{(\mathcal{J},\mathcal{E})}{Fun}(\Delta -, F)$

~~exemple plus concret : Si $F : \mathcal{J} \to \mathcal{E}$ alors une limite de F est un objet $\lim F \in \mathcal{E}$ avec $\phi : \lim F \Rightarrow F$;~~ ∃! isom that commutes with legs

Rem (1) Si les limites existent elles sont uniques à iso près
(2) le thm 2.12 entraine que si toutes les limites de $\mathcal{J} \to \mathcal{E}$ existent alors lim peut être promu comme foncteur

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, Rightarrow, "\eta"'] \\ F' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Delta \lim F \arrow[r, Rightarrow, "\lambda"] \arrow[d, dashed, "\exists !"'] & F \arrow[d, Rightarrow, "\eta"] \\ \Delta \lim F' \arrow[r, Rightarrow, "\lambda'"'] & F' \end{tikzcd}$$

Cor 2.15 (1) Si la catégorie $\mathcal{E}$ admet toutes les $\mathcal{J}$ limites, alors $\lim : Fun(\mathcal{J}, \mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ est adjoint à droite de Δ.
(2) Si $\mathcal{E}$ admet des $\mathcal{J}$-colimites alors $colim : Fun(\mathcal{J}, \mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ est adjoint à gauche de $\Delta : \mathcal{E} \to Fun(\mathcal{J}, \mathcal{E})$.

(0) Colim $\emptyset$ = initial objet

Exemples / Définitions 2.16

(1) $\mathcal{J}$ discrète $F : \mathcal{J} \to \mathcal{E}$, alors $\lim F := \prod_{j \in \mathcal{J}} F(j)$ le produit

↳ $F \leftrightarrow$ donnée de $(X_j)_{j \in \mathcal{J}}$ avec $X_j \in \mathcal{E}$

et $\pi_j : \prod_{j \in \mathcal{J}} X_j \to X_j$ les "projections canoniques" telles que

$\forall\, Z \in \mathcal{E}$ & $(\phi_j : Z \to X_j)_{j \in \mathcal{J}}$ $\exists!\, \alpha : Z \to \prod_{j \in \mathcal{J}} F(j)$;

$\pi_j \circ \alpha = \phi_j \ \forall j \in \mathcal{J}$.

(2) Dual^t $\mathcal{J}$ discrète alors $\operatorname{colim} F = \coprod_{j \in \mathcal{J}} F(j)$ exercice décrire le coproduit

(3) $\mathcal{J} = \bullet \rightrightarrows \bullet$ un (co)égalisateur est une (co)limite d'un diag indexé par $\mathcal{J}$

ex Coégalisateur de $A \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} B$ est un objet C avec $\pi : B \to C$ tq

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"'] & C \arrow[dl, dashed, "\exists!\alpha"] \\ & C' & \end{tikzcd}$$

$\pi a = \pi b$

$\forall\, \pi'$; $\pi' a = \pi' b$ alors $\exists!\, \alpha$ $C \to C'$

tq $\pi' = \alpha \pi$

(4) $\mathcal{J} = \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$ lim = pullback ou produit fibré

$\bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$ colim = pushout ou produit amalgamé

(5) $\mathcal{J} = \omega^{op}$ $\cdots \to 4 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$ dans ce cas on utilise souvent le nom limite inverse et on note $\varprojlim F$

$$\begin{tikzcd} & & C \arrow[dll, "\lambda_n"'] \arrow[d, "\lambda_1"'] \arrow[dr, "\lambda_0"] & \\ F(n) \arrow[rr, "\alpha_n"'] & & F(1) \arrow[r, "\alpha_1"'] & F(0) \end{tikzcd}$$

tq $(\alpha_i \dots \alpha_n) \circ \lambda_n = \lambda_i$

Ex typique $\varprojlim_{n \geq 0} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ entiers p-adiques dans la catégorie des anneaux.

$\mathcal{J} = \omega = 0 \to 1 \to 2 \to \cdots$ colim = limite directe

Ex $\varinjlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}(p^\infty)$ gpe de Prüfer.

Déf 2.17 Soit $\mathcal{E}$ une catégorie. Alors $\mathcal{E}$ est (co)complète si $\forall J$ petite et $F : J \to \mathcal{E}$ diag, alors F a une (co)limite dans $\mathcal{E}$

Thm 2.18 $\mathcal{E}$ est (co)complète ssi $\mathcal{E}$ admet tout (co)égaliseur et (co)produit

démo $\Rightarrow$ évident

$\Leftarrow$ $F : J \to \mathcal{E}$ un petit diag

On pose $P = \prod_{i \in Ob(J)} F(i)$ et $\pi_i : P \to F(i)$ proj cano

$Q = \prod_{\substack{\alpha \in Mor(J) \\ \alpha : i \to j}} F(\text{codomaine}(\alpha))$ $\quad p_\alpha : Q \to F(cod(\alpha))$ proj cano

Alors on a $\forall \alpha : y \to x$ ($i \to j$)

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, dashed, "\exists! g"'] & F(i) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\ Q \arrow[r, "p_\alpha"'] & F(j) \end{tikzcd} \quad (1) \quad \left(F(\alpha) \circ \pi_y : P \to F(j) \right)_\alpha$$

et $\forall \alpha : y \to x$ ($i \to j$)

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_j"] \arrow[d, dashed, "\exists! h"'] & F(j) \\ Q \arrow[ur, "p_\alpha"'] & \end{tikzcd} \quad (2) \quad \left((\pi_x)_{\alpha : x \to ?} \right)_\alpha$$

On pose $X = \text{égaliseur}\left(P \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} Q\right)$ et on prétend que c'est la limite de F. $X \xrightarrow{f} P \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} Q$

① On pose $\forall i \in J$ $f_i : X \to F(i)$. Alors $(f_i)_i$ est une trans nat $\Delta X \Rightarrow F$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f"'] & F(i) \\ & P \arrow[u, "\pi_i"'] \end{tikzcd}$$

en effet $\forall \alpha : i \to j$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\ P \arrow[d, "\pi_i"'] & & P \arrow[d, "\pi_j"] \\ F(i) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

alors $f_j = \pi_j \circ f \underset{(2)}{=} p_\alpha \circ h \circ f$

$= p_\alpha \circ g \circ f$ (f eq de g, h)

$= F(\alpha) \pi_i \circ f$

$\overset{(1)}{=} F(\alpha) f_i$

② $(X, (f_i))$ est final en effet soit $(X', (f'_i))$ un cône sur F alors $f'_i : X' \to F(i)$ $\forall i$ donc par la propriété univ du produit il existe

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dashed, "\exists! g'"] \arrow[dr, "f'_i"'] & P \arrow[d, "\pi_i"] \\ & F(i) \end{tikzcd} \quad (3)$$

On a donc
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & P \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\ & Q \end{tikzcd}$$
si on montre que $hf' = gf'$ alors la plé universelle de l'égalisateur donnera $u : X' \to X$; $f' = fu$

Par la plé universelle du produit (l'unicité) il suffit de mq $\forall \alpha : i \to j \quad p_\alpha h f' = p_\alpha g f'$.

On a le joli diag
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\circledast"] & \\ X' \arrow[ur, "\exists ! u"] \arrow[r, "f'"] & P \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "g"] & F(i) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\ & Q \arrow[r, "p_\alpha"'] & F(j) \end{tikzcd}$$

et $p_\alpha \circ g \circ f' \underset{(1)}{=} F(\alpha)\, \pi_i \circ f' = F(\alpha)\, f'_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nat of} \\ f'}}{=} f'_j \underset{(3)}{=} \pi_j \circ f' \underset{(2)}{=} p_\alpha \circ h \circ f'$

$\neq$ cônes

d'où $\exists !\, u : X' \to X$ s.t. $\circledast$ One lasts check $\square$

Unicity with respect to lim condition!

$X \xrightarrow{f} P \xrightarrow{\pi_j} F(j)$, u, u', X', f'

$\pi_j \circ f \circ u = \pi_j \circ f \circ u'$

$\Rightarrow f \circ u = f \circ u'$

$\Rightarrow u = u'$ mais f égalisateur donc f mono

Thm 2.19 ① Les adjoints à droite preservent les limites

② les adjoints à gauche preservent les colimites

Démo $\mathcal{E} \underset{D}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$, T, $\mathcal{J}^T$ on veut mq $D \lim T \simeq \lim DT$

on procède par adjonctions successives:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, D\lim T) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), \lim T) \underset{\circledast}{\simeq} \lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), T) \\ &\simeq \lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, DT) \\ &\underset{\circledast}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \lim DT) \end{aligned}$$

$\circledast$ Si $\mathcal{E}$ admet des $\mathcal{J}$-limites on

- $\lim \mathcal{E}(X, F) \simeq \mathcal{E}(X, \lim F)$ fonctoriel^t en X voir TD.
- $\lim_{\mathcal{J}^{op}} \mathcal{E}(F, X) \simeq \mathcal{E}(\mathrm{colim}_{\mathcal{J}} F, X)$ // //

Thm 2.20 $F : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ functor between "locally presentable" categories (Ex $\mathcal{E} = \mathrm{Mod}\, R$)

Then F admits a left adjoint iff continuous

right - cocontinuous.

Bonus <u>small limits vs large limits.</u>

Ex For a category $\mathcal{C}$, the identity functor on $\mathcal{C}$ $1_{\mathcal{C}}$ has a limit iff $\mathcal{C}$ has an initial object

Def The cardinality of a small category $\mathcal{C}$ is cardinality of $Mor(\mathcal{C})$. $\mathcal{C}$ is k-small if $|Mor(\mathcal{C})| \leq k$

Prop (Freyd) A k-small cat that admits all k-small limits or k-small colimits is a preorder.

Proof $\lambda = |Mor(\mathcal{C})|$

For $\exists$ $f, g : B \rightrightarrows A$ with $f \neq g$ look at universal property of $\underset{\lambda\text{-index}}{\prod} A$ then there are 2^λ maps from $B \to \prod_\lambda A$ whose components are f or g

by Cantor's diagonalisation $|Hom(B, A^\lambda)| \geq 2^\lambda > \lambda = |Mor(\mathcal{C})|$

↳ contradicting $Hom(B, A^\lambda)$ to be a subset of $Mor\,\mathcal{C}$. ▷