PRODUITS TENSORIELS, CATÉGORIES ADDITIVES ET COMPLEXES DE CHAINES

Les questions et exercices $*$ peuvent être ignorées.

1. Produit tensoriel

Exercice 1 -

(1) Montrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(n,m)\mathbb{Z}$. Que se passe-t-il si m et n sont premiers entre eux ?

(2) Plus généralement, soient R un anneau unitaire (pas nécessairement commutatif) et I et J deux idéaux bilatères. Démontrer que $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J)$.

(3) Démontrer que le produit tensoriel est associatif.

Exercice 2 - Groupe de Picard

(1) Soit k un corps et n un entier. Démontrer que la catégorie des modules (à gauche) sur l'algèbre $M_n(k)$ est équivalente à la catégorie des k-espaces vectoriels. Indication, on pourra considérer $V = k^{n,1}$ les vecteurs colonnes de taille n dans k et $W = k^{1,n}$ les vecteurs lignes de taille n dans k et considérer les foncteurs $V \otimes_k -$ et $W \otimes_{M_n(k)} -$.

(2) Soient A et B des k-algèbres telles que $A\,\mathrm{Mod}$ et $B\,\mathrm{Mod}$ sont équivalentes. Déduire de la première question que A et B n'ont pas nécessairement des groupes d'automorphismes isomorphes. De même leurs groupes des unités ne sont pas nécessairement isomorphes.

(3) Soit k un anneau commutatif et A une k-algèbre. Si X est un A-A-bimodule, on note par $[X]$ sa classe d'isomorphisme en tant que A-A-bimodule et on dit que X est *inversible* s'il existe un A-A-bimodule Y tel que $[X \otimes_A Y] = [Y \otimes_A X] = [A]$. Justifier que le produit tensoriel au dessus de A induit une structure de groupe sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de A-bimodules inversibles. On l'appelle le *groupe de Picard* de A et on le note $\mathrm{Pic}(A)$.

(4) Soit M un bimodule inversible. Démontrer que $\mathrm{End}_A(M) \cong A^{op}$.

(5) Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}_k(A)$. Justifier brièvement que l'application $-\cdot-\cdot- : A\times A\times A \to A$ définie par $a\cdot x\cdot b = ax\alpha(b)$ munit A d'une structure de A-bimodule. On note par ${}_1A_\alpha$ ce bimodule.

(6) Démontrer que $\alpha \mapsto {}_1A_\alpha$ induit un homomorphisme Φ de groupes de $\mathrm{Aut}_k(A)$ vers $\mathrm{Pic}(A)$ dont le noyau est $\mathrm{Inn}(A)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de A. On note $\mathrm{Out}_k(A)$ le groupe $\mathrm{Aut}_k(A)/\mathrm{Inn}(A)$.

(7) * Soient M et N deux bimodules inversibles. Démontrer que M et N sont isomorphes en tant que A-modules à gauche si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}_k(A)$ tel que $M \cong N \otimes_A {}_1A_\alpha$ en tant que A-bimodules. (On pourra commencer par supposer que $N = A$, puis on s'y ramène en utilisant l'inversibilité de N).

(8) * En déduire que l'image de Φ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de A-A-bimodules qui sont libres de rang 1 en tant que A-module à gauche.

(9) * On peut montrer que
- $\mathrm{Pic}(A)$ est invariant par équivalence de catégories : si A et B sont deux k-algèbres telles que $\mathrm{Mod}\,A \cong \mathrm{Mod}\,B$, alors $\mathrm{Pic}(A) \cong \mathrm{Pic}(B)$.
- Il y a un homomorphisme de groupe Γ de $\mathrm{Pic}(A)$ vers $\mathrm{Aut}_k(Z(A))$. On note $\mathrm{Picent}(A)$ le noyau de Γ. Si A est une algèbre commutative, alors $\mathrm{Pic}(A) = \mathrm{Picent}(A) \rtimes \mathrm{Aut}_k(A)$.
- Dans certains cas le groupe de Picard de A est réduit à $\mathrm{Out}_k(A)$, c'est par exemple le cas si A est une algèbre de dimension finie dont tous les modules simples sont de dimension 1, comme les algèbres de chemins sur un carquois acyclique.
- Pour plus de détails : The Picard group of noncommutative rings, in particular of orders. A. Fröhlich, Transactions of the American Mathematical Society Volume 180, June 1973.

Correction

(1) One has to show many small results : $A \otimes - \cong Id_{\mathrm{Mod}\,A}$, an isomorphism of bimodules, induces an isomorphism of functors. To finish, it remains to check that $V \otimes W$ and $W \otimes V$ are isomorphic to $M_n(k)$ and k as bimodules.

(2) Clear consequence of the first question. The idea is now to find a good replacement which is indeed preserved by equivalences of categories.

(3) This is also clear from question 1 and associativity of tensor product. The identity of the group is the class of A with its two natural actions.

(4) As consequence of question 1, if a bimodule M is invertible, then $M \otimes -$ is an equivalence of categories, with quasi-inverse $N \otimes -$ where N is a bimodule that inverses M. Hence, $M \otimes -$ is fully-faithful. So $\mathrm{Hom}_A(A, A) \cong \mathrm{Hom}_A(M \otimes A, M \otimes A) \cong \mathrm{Hom}_A(M, M)$. It remains to see that $A^{op} \cong \mathrm{Hom}_A(A, A)$.

(5) Clear.

(6) We have many small results to check : the tensor product of A_α and A_β is isomorphic as bimodule to $A_{\alpha\circ\beta}$ and $A_\alpha \cong A$ as bimodule if and only if α is an inner automorphism.

(7) Let $f : M \to A$ be an isomorphism of left A-modules. For $a \in A$, the right multiplication by a, denoted by $r_a : M \to M$ is a morphism of left modules. Hence $f \circ r_a \circ f^{-1} \in End_A(A)$. So, there is an $\alpha(a) \in A$ such that this endomorphism is equal to $r_{\alpha(a)}$. We have to check that α is an algebra endomorphism of a. This is done by computing $r_{\alpha(a)} \circ r_{\alpha(b)}$ and $r_{\alpha(1)}$. To see that it is an algebra automorphism, we can compute $f^{-1} \circ r_a \circ f \in \mathrm{End}(M) \cong A^{op}$. Hence this is given by $r_{\gamma(a)}$ for a $\gamma(a) \in A$. Now check that this is the inverse of α, by computing $r_{\gamma\circ\alpha(a)}$ and $r_{\alpha\circ\gamma(a)}$. Finally, $f : M \to A_\alpha$ is an isomorphism of A-bimodules.

To conclude the proof, if M and N are isomorphic as left modules, let N' be an inverse of N, we have $N' \otimes M \cong N' \otimes N \cong A$. So by the previous argument $N' \otimes M \cong A_\alpha$ as bimodules, multiplying on the left by N gives $N \otimes N' \otimes M \cong M \cong N \otimes A_\alpha$.

(8) This is clear from question (7).

2. Catégories additives

Exercice 3 - Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie et $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$.

(1) Un égalisateur de $(f, 0)$ est appelé un noyau de f. Ecrire la propriété universelle du noyau de f.

(2) Même question pour le conoyau de f qui est un co-égalisateur de $(f, 0)$.

(3) Décrire les noyaux et conoyaux dans les catégories de modules sur un anneau.

(4) On suppose de plus que $\mathcal{C}$ possède un objet zero. Montrer que f est un monomorphisme si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cong 0$. Dualement, montrer que f est un épimorphisme si et seulement si $\mathrm{Coker}(f) \cong 0$.

Correction 1,2,3 are easy. The last one is a consequence of the existence of a zero object. Can be found for example in Assem page 214.

Exercice 4 - Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ trois petites catégories et $F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ un foncteur. Montrer que la composition par F induit un foncteur la catégorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ vers la catégorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}$.

Exercice 5 - * Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. Soient $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. En utilisant les propriétés universelles des produits et coproduits construire un morphism $\Delta_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X \oplus X)$, un morphisme $f \oplus g : \mathrm{Hom}(X \oplus X, Y \oplus Y)$ et un morphisme $\nabla_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \oplus Y, Y)$ tels que $f + g = \nabla_Y \circ (f \oplus g) \circ \Delta_X$. **Correction** can be found for example

in Assem pages 240, 241 and 242.

Exercice 6 - * Soit $\mathcal{C}$ une catégorie preadditive. Montrer qu'il existe une catégorie additive $\mathrm{Add}(\mathcal{C})$ telle que :

(1) Il existe un foncteur additif pleinement fidèle $J : \mathcal{C} \to \mathrm{Add}(\mathcal{C})$.

(2) Si $\mathcal{D}$ est une catégorie additive et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur linéaire, alors il existe un unique foncteur additif $\overline{F} : \mathrm{Add}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$ tel que $\overline{F} \circ J = F$.

La propriété universelle entraine qu'une telle catégorie sera unique à équivalence de catégorie près. On l'appelle *l'additivisation* de $\mathcal{C}$. Indication : on peut chercher une catégorie dont les objets sont les suites finies d'objets de $\mathcal{C}$. Moralement la suite $(X_1, \cdots, X_n)$ représente la somme directe des X_is.

3. Catégories de complexes de chaines

Exercice 7 - On travaille dans la catégorie des complexes de chaines de A-modules pour un anneau A. On dit qu'un complexe de chaines $(C_\bullet, d)$ est scindé s'il existe une famille d'applications $s_n : C_n \to C_{n+1}$ telle que $d_{n+1} = d_{n+1} s_n d_{n+1}$.

(1) On suppose que le complexe $C_\bullet$ est scindé. Montrer que $C_\bullet$ est exact si et seulement si il est contractile (i.e. l'application identité $C_\bullet \to C_\bullet$ est homotope à l'application nulle).

(2) Donner un exemple d'un complexe de chaines exact qui n'est pas contractile.

(3) Considérons une suite exacte de R-modules libres $C_\bullet : \cdots \to C_n \to \cdots \to C_0 \to 0$. Montrer que $C_\bullet$ est scindée.

(4) Trouver un exemple de suite exacte (non bornée) de R-modules libres qui n'est pas scindée.

Exercice 8 - * Soit $f : C \to D$ un morphisme de complexes de chaines.
On note $C[1]$ le complexe défini par $C[1]_n = C_{n-1}$, $d = -d^C$.
On pose $\mathrm{Cone(f)_n = C_{n-1} \oplus D_n}$ et $d : \mathrm{Cone(f)_n} \to \mathrm{Cone(f)_{n-1}}$ définie par

$$d(x,y) = (-d^C x, d^D y + f(x))$$

(1) Montrer que Cone(f) est un complexe et que $0 \to D \to \mathrm{Cone(f)} \to \mathrm{C[1]} \to 0$ est une suite exacte courte de complexes.

(2) En déduire que f est un quasi-isomorphisme si et seulement si Cone(f) est exact.

(3) Montrer que si f est une équivalence d'homotopie alors Cone(f) est contractile.

(4) En déduire que $\mathrm{Cone(id_C)}$ est scindé et exact. On le note Cone(C). On note également $j : C \to \mathrm{Cone(C)}$ l'application canonique.

(5) Montrer que f est homotopiquement nulle si et seulement si il existe $s : \mathrm{Cone(C)} \to \mathrm{D}$ telle que $f = sj$.

Exercice 9 - *

Soit A un anneau et $Ch_+(A)$ la catégorie des complexes de chaines de A-modules concentrés en degrés positifs. Montrer qu'un complex $C_\bullet$ est isomorphe à 0 dans la catégorie homotopique $K_+(A)$ si et seulement si $C_\bullet$ est isomorphe à une somme directe de complexes de la forme $0 \to Z \overset{id}{\to} Z \to 0$ concentrés en deux degrés.