COMPLEXES DE CHAINES ET HOMOLOGIE

Exercice 1 - Examen seconde session 2022 Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Montrer que la catégorie des foncteurs
$$Fun(\mathcal{C}, \mathcal{A})$$
est abélienne.

1. Complexes de (co)chaines

Exercice 2 - Soit k un anneau commutatif unitaire et A une k-algèbre. On rappelle que pour nous, une k-algèbre est un anneau associatif (non nécessairement commutatif) unitaire avec un homomorphisme $k \to Z(A)$. Soit M un A-A-bimodule.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $CH_n(A, M) := M \otimes_k A^{\otimes_k n}$ et $CH_0(A, M) := M$. Pour $i \in [n]$, on pose
$$d_i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} m \cdot a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots a_n \text{ si } i = 0, \\ m \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \text{ si } 0 < i < n, \\ a_n \cdot m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \text{ si } i = n. \end{cases}$$
Vérifier que l'application $d_n : CH_n(A, M) \to CH_{n-1}(A, M)$ définie par $\delta_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ fait de $(CH_\bullet(A, M), \delta)$ un complexe de chaînes de k-modules. On l'appelle complexe de chaînes de *Hochschild* de A à coefficients dans M. On note par $HH_n(A, M)$ le n-ième groupe d'homologie de ce complexe.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $CH^n(A, M) := \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)$ et $CH^0(A, M) = M$. Pour $i \in [n]$, on pose $\delta^i : \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \to \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, M)$ l'application définie par
$$d^i(f)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \text{ si } i = 0, \\ f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} a_i \otimes \cdots \otimes a_n) \text{ si } 0 < i \leq n, \\ f(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) a_n \text{ si } i = n+1. \end{cases}$$
Vérifier que l'application $\delta^n : CH^n(A, M) \to CH^{n+1}(A, M)$ définie par $\delta_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d^i$ fait de $(CH^\bullet(A, M), d)$ un complexe de cochaînes de k-modules. On l'appelle complexe de cochaînes de *Hochschild* de A à coefficients dans M. On note par $HH^n(A, M)$ le n-ième groupe de cohomologie de ce complexe.

(3) Calculer $HH_0(A, M)$ et $HH^0(A, M)$. On peut supposer $M = A$ pour simplifier si l'on souhaite.

(4) Une dérivation de A est une application $d : A \to A$ k-linéaire telle que $d(ab) = d(a)b + ad(b)$. Une dérivation d est intérieure s'il existe $m \in A$ tel que $d(a) = am - ma$ pour tout a. On note $Der(A)$ l'ensemble des dérivations de A et $IDer(A)$ l'ensemble des dérivations intérieures de A. Montrer que $HH^1(A, A) = Der(A)/IDer(A)$.

(5) *** Qu'est ce que $HH_1(A, A)$? Lorsque A est commutative $HH_1(A)$ est donné par $\Omega^1_{A|k}$ qui est un objet universel représentant le foncteur dérivation $Der(A, -)$, appelé le module des différentielles de Kähler.

(6) *On pose $B_n(A) = A^{\otimes_k n+2}$ et pour $i \in [n]$, on pose d_i l'application $B_n(A) \to B_{n-1}(A)$ définie par $d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_0 \otimes ... \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$. Vérifier que ceci permet de munir $(B_n(A))_n$ d'une structure de complexe de chaînes. On l'appelle la résolution *barre* de A.

(7) * Voyez-vous le lien avec le complexe $CH_\bullet(A, M)$?

(8) * On considère le complexe augmenté $(\widetilde{B}_n(A), d)$ où $\widetilde{B}_{-1}(A) = A$, $\widetilde{B}_n(A) = B_n(A)$ si $n \in \mathbb{N}$ et $\widetilde{B}_n(A) = 0$ sinon. On pose $d_0 : A \otimes A \to A$ l'application induite par $d_0(a \otimes b) = ab$. Vérifier que $(\widetilde{B}_n(A), d)$ est un complexe de chaînes homotopique au complexe nul.

Exercice 3 - Homologie des ensembles ordonnés, Exam 2023

Soit $(P, \leq)$ un ensemble (partiellement) ordonné. On appelle m-chaine de P un sous-ensemble totalement ordonné de P contenant exactement $m+1$ éléments. Les 0-chaines correspondent donc aux éléments de P, et les 1-chaines sont les couples (x, y) avec $x \leq y \in P$ et $x \neq y$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n(P)$ le groupe abélien libre sur l'ensemble des n-chaines de P. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n : C_n(P) \to C_{n-1}(P)$ l'application définie sur une n-chaine $(x_0 < \cdots < x_n)$ par
$$d_n(x_0 < \cdots < x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0 < \cdots < \widehat{x_i} < \cdots x_n),$$
où $(x_0 < \cdots < \widehat{x_i} < \cdots x_n)$ est la $(n-1)$-chaine obtenue en retirant x_i.

(1) Montrer que $C(P)_\bullet = (C_n(P), d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un complexe de chaines de groupes abéliens. Son homologie s'appelle l'homologie de l'ensemble ordonné P.
(2) On considère $\epsilon : C_0(P) \to \mathbb{Z}$ l'application définie sur une 0-chaine $x \in P$ par $\epsilon(x) = 1$. Justifier que l'on peut augmenter le complexe $C_\bullet(P)$ en posant $C_{-1} = \mathbb{Z}$ et $d_0 = \epsilon$. On note alors $\widetilde{C}_\bullet$ ce complexe.
(3) Pour $x, y \in P$, on dit que x et y sont *comparables* si $x \leq y$ ou $y \leq x$. On dit que P est *connexe* si pour tout $x, y \in P$, il existe $x_0, x_1, \cdots, x_s \in P$ avec $x_0 = x$, $x_s = y$ et x_i, x_{i+1} sont comparables pour tout $i \in \{0, \cdots, s-1\}$. Décrire l'homologie de degré 0 de P, lorsque P est connexe. Quelle est l'homologie $H_0(P)$ lorsque P n'est pas connexe ? (pour cette seconde partie, on ne demande pas une démonstration détaillée).
(4) On considère l'ensemble $X = \{1, 2, 3\}$ et $P = (\mathcal{P}(X), \subset)$ l'ensemble des parties de X ordonnées par inclusion. On considère $\overline{P} = P \setminus \{\emptyset, X\}$ ordonné par inclusion. Calculer l'homologie de $\overline{P}$.
(5) On suppose P possède un plus petit élément 0 (i-e tel que $0 \leq x \ \forall x \in P$). Montrer que $\widetilde{C}_\bullet$ est contractile. En déduire l'homologie de P.

2. Projectifs et injectifs

Exercice 4 -
(1) Montrer que tout facteur direct d'un module projectif est projectif.
(2) Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est projectif et non libre en tant que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-module. Généraliser.
(3) Montrer qu'un coproduit de modules projectifs est un module projectif.
(4) Montrer que toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$ avec C projectif est scindée.
(5) Si A est un anneau principal (PID), montrer qu'un module de type fini est projectif si et seulement s'il est libre. On pourra se ramener à la démonstration qu'un sous-module d'un module libre de rang n est libre de rang au plus n.
(6) * Si $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local, alors tout module projectif de type fini est libre.
(7) Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné fini et k un corps. On voit X comme une catégorie et on pose $\mathrm{Rep}_k(X) = \mathrm{Fun}(X, k\,\mathrm{Mod})$. Montrer que les foncteurs 'représentables' $h_x = k[\mathrm{Hom}_X(x, -)]$ sont projectifs. Que se passe-t-il si on remplace $(X, \leq)$ par un groupe et que l'on regarde les foncteurs sur la catégorie du groupe ?

Exercice 5 - * Soient G un groupe fini et k un corps. Démontrer que toute suite exacte courte de kG-modules de dimension finie est scindée si et seulement si la caractéristique de k ne divise pas l'ordre de G.

Exercice 6 - Critère de Baer
Soit M un R-module.
(1) ** Montrer que M est injectif si et seulement si pour tout idéal I de R, tout morphisme $I \longrightarrow M$ s'étend en un morphisme $R \longrightarrow M$. (Hint : Zorn's Lemma)
(2) En déduire que si de plus R est principal, alors M est injectif si et seulement si M est *divisible* (c'est-à-dire pour tout $a \in R \setminus \{0\}$ la multiplication $M \xrightarrow{\times a} M$ est surjective).
(3) Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont des groupes abéliens injectifs.

Exercice 7 - Algèbres de dimension finie, Exam 2023 Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps k. On admet que les A-modules de type fini sont exactement les A-modules de dimension finie sur le corps k. On note $\mathrm{mod}\,A$ la catégorie des A-modules (à droite) de type fini.
(1) Justifier que la catégorie $\mathrm{mod}\,A$ est abélienne.
(2) Démontrer que la catégorie $\mathrm{mod}\,A$ possède assez de projectifs.
(3) Démontrer que $\mathrm{mod}\,A$ possède assez d'injectifs. Indication, on pourra utiliser le foncteur $D = \mathrm{Hom}_k(-, k)$.

Exercice 8 - Bockstein Soit n un entier ; on considère la suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$. Soit C un complexe de chaine tel que C_k est un groupe abélien libre pour tout k.
(1) Justifier qu'il existe une suite exacte longue
$$\ldots \to H_k(C) \to H_k(C) \xrightarrow{\rho_k} H_k(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\overline{\beta_k}} H_{k-1}(C) \to \ldots$$
(2) On note β_k la composée
$$H_k(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\overline{\beta_k}} H_{k-1}(C) \xrightarrow{\rho_{k-1}} H_{k-1}(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$
Montrer que $\beta_k \beta_{k+1} = 0$
(3) On suppose que $n = p$ est un nombre premier et que pour tout k le groupe $H_k(C)$ est un groupe de p-torsion. Montrer que l'homologie du complexe $(H_*(C \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \beta)$ est nulle.