DERIVED FUNCTORS

Exercice 1 -

(1) Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes et $U : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un foncteur additif et exact entre catégories abéliennes. Montrer que $U(L_iF)$ est isomorphe à $L_i(U(F))$ et que $U(R^iF)$ est isomorphe à $R^i(U(F))$.

(2) Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes.

  (a) Montrer que L_0F est exact à droite et que R^0F est exact à gauche.

  (b) Montrer que

$$L_mL_nF = \begin{cases} L_mF, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) Si F est exact, calculer ses foncteurs dérivés gauches et droits.

Exercice 2 -

Soit F un foncteur additif entre deux catégories abéliennes, exact à droite.

(1) Montrer que si $0 \to M \to P \to A \to 0$ est exacte avec P projectif alors $L_i(F(A))$ est isomorphe à $L_{i-1}(F(M))$ pour tout $i \geq 2$. Montrer que $L_1F(A)$ est le noyau de $F(M) \to F(P)$.

(2) On se donne une suite exacte

$$0 \to M_m \to P_m \to P_{m-1} \to \ldots \to P_0 \to A \to 0$$

où les P_i sont projectifs. Montrer que $L_i(F(A))$ est isomorphe à $L_{i-m-1}F(M_m)$ pour tout $i \geq m+2$ et que $L_{m+1}F(A)$ est le noyau de $F(M_m) \to F(P_m)$.

(3) On dit qu'un objet Q est F-acyclique si $L_i(F(Q)) = 0$ pour tout $i \geq 1$.
Montrer que si $Q \to A$ est une résolution de A telle que Q_n est F-acyclique pour tout $n \geq 0$ alors $L_iF(A) = H_i(F(Q)), \forall i \geq 0$.

Exercice 3 - Extrait de l'examen du 4 novembre 2016 Soit R un anneau et B un R-module à gauche. Pour $r \in R$, on note ${}_rB = \{b \in B | r \cdot b = 0\}$ et $r \cdot B = \{r \cdot b, b \in B\}$.

(1) On pose $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $A = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ avec d divise m et $m \geq 2$. Montrer que, pour tout R-module B, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^0_R(A, B) = {}_dB \\ \mathrm{Ext}^i_R(A, B) = ({}_{\frac{m}{d}}B)/(d \cdot B), & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \mathrm{Ext}^i_R(A, B) = ({}_dB)/(\frac{m}{d} \cdot B), & \text{si } i \geq 2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

(2) * Donner une extension représentative pour chaque classe d'équivalence d'extensions de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$-module.

Exercice 4 -

Let m, n be two integers and B an abelian group.

(1) Compute $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ for all $i \geq 0$.

(2) Same question for $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ for all $i \geq 0$.

(3) If $d \mid n$, compute $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_i(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, B)$ for all $i \geq 0$.

Exercice 5 - Group cohomology Let G be a group.

(1) * Show that $\mathrm{Fun}(G, \mathbb{Z}\,\mathrm{Mod})$ is equivalent to $\mathbb{Z}[G]\,\mathrm{Mod}$, where $\mathbb{Z}[G]$ is the group algebra of G over $\mathbb{Z}$.

(2) Let $\mathbb{Z}$ be the trivial $\mathbb{Z}[G]$-module, i-e every element of G acts as the identity on $\mathbb{Z}$. For $M \in \mathbb{Z}[G]\,\mathrm{Mod}$, we set $H^n(G, M) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$.

  (a) Let $M^G = \{m \in M;\ gm = m\ \forall g \in G\}$. Show that $H^0(G, M) \cong M^G$.

  (b) Make M^G functorial in M and check that $H^n(G, M)$ is the nth right derived functor of $M \mapsto M^G$.

(3) Let $\epsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ be the map defined by $\epsilon(\sum_{g\in G} \lambda_g g) = \sum_{g\in G} \lambda_g$ and $I(G) = \ker(\epsilon)$. Show that $I(G)$ is a free $\mathbb{Z}$-module with basis $\{g - 1;\ g \in G\}$.

(4) Let $\mathrm{Der}(G, M) = \{f : G \to M;\ f(gh) = gf(h) - f(g)\ \forall g, h \in G\}$. Let $Inn(G, M) = \{f : G \to M\ ;\ \exists m \in M, f(g) = gm - m\ \forall g \in G\}$.

(a) If $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(I(G), M)$, let $D_\phi : G \to M$ be the map defined by $D_\phi(g) = \phi(g-1)$. Show that $D_\phi \in \mathrm{Der}(G, M)$.

(b) Show that $\phi \mapsto D_\phi$ is an isomorphism between $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(I(G), M)$ and $\mathrm{Der}(G, M)$.

(5) Show that there is an exact sequence $0 \to M^G \to M \to \mathrm{Der}(G, M) \to H^1(G, M) \to 0$, where the map $M \to \mathrm{Der}(G, M)$ sends m to D_m the derivation defined by $D_m(g) = gm - m$.

(6) Conclude that $H^1(G, M) \cong \mathrm{Der}(G, M)/Inn(G, M)$.

(7) Let F_n be the free $\mathbb{Z}$-module of with $\mathbb{Z}$-basis consisting of the $n+1$-tuples $(g_0, \cdots, g_n)$. This is a $\mathbb{Z}[G]$ module for the action induced by the diagonal left multiplication by the elements of G. One can see that it is also a free $\mathbb{Z}[G]$-module with basis $\{(1, g_1, \cdots, g_n)\ ;\ g_i \in G\}$. Check that the face maps $d_i : G^{n+1} \to G^n$ defined by $d_i(g_0, \cdots, g_n) = (g_0, \cdots, g_{i-1}, g_{i+1}, \cdots g_n)$ endow $(F_n)_n$ of a structure of chain complexes of abelian groups.

(8) Show that F_n is a free resolution, as $\mathbb{Z}[G]$-modules, of the trivial $\mathbb{Z}[G]$-module. Hint : check that the augmented complex, using $\epsilon : \mathbb{Z}[G] \to Z$ is exact, by showing that it is contractible. One can use $s_n : F_n \to F_{n+1}$ defined by $s_n(g_0, \cdots, g_n) = (1, g_0, \cdots, g_n)$.

(9) Let us denote by $[g_1|g_2|\cdots|g_n] = (1, g_1, g_1g_2, g_1g_2g_3, \cdots, g_1g_2\cdots g_n) \in G^{n+1}$. Then $(1, g_1, \cdots, g_n) = [g_1|g_1^{-1}g_2|\cdots|g_{n-1}^{-1}g_n]$. As a consequence F_n is a free $\mathbb{Z}[G]$-module with basis the set $\{[g_1|g_2|\cdots|g_n]\ ;\ g_i \in G\} =: \underline{G}_n$. Check that with this notation, the face maps are :

$$\delta_i([g_1|\cdots|g_n]) = \begin{cases} g_1[g_2|\cdots|g_n] & \text{if } i = 0 \\ [g_1|\cdots|g_{i-1}|g_ig_{i+1}|\cdots|g_n] & \text{if } 1 \le i \le n-1 \\ [g_1|\cdots|g_{n-1}] & \text{if } i = n. \end{cases}$$

Note that F_0 has basis [] the empty symbol. So $\epsilon : F_0 \to \mathbb{Z}$ is defined by $\epsilon([]) = 1$. This is the so-called bar resolution.

(10) If M is a $\mathbb{Z}[G]$-module, show that $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(F_n, M) \cong \mathrm{Hom}_{Set}(\underline{G}_n, M) =: C^n(G, M)$. Deduce that the cohomology $H^n(G, M)$ is isomorphic to the cohomology of a complex of cochains constructed with the $C^n(G, M)$.

(11) Can you recover the result of Question 6 ?

(12) Describe the 2-cocycles and the 2-coboundaries of $C^\bullet(G, M)$.

(13) If G is finite, show that every element in $H^2(G, M)$ as order dividing $|G|$. Can you generalize to higher cohomology groups ?

(14) Conclude, that if M and G are two finite groups such that $1 = gcd(|G|, |M|)$, then $H^2(G, M) = 0$.

(15) Show that when G is finite and M finitely generated, then the abelian groups $H^n(G, M)$ are finite for $n \neq 0$.

Exercice 6 - *Cohomologie des groupes cycliques

Soit $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\omega^i, 0 \le i \le n-1\}$.
Dans $\mathbb{Z}[G]$ on considère les éléments $T = \sum_{i=0}^{n-1} \omega^i$ et $N = \omega - 1$.

(1) Montrer que le complexe

$$\ldots \to \mathbb{Z}[G] \stackrel{\times T}{\to} \mathbb{Z}[G] \stackrel{\times N}{\to} \ldots \to \mathbb{Z}[G] \stackrel{\times T}{\to} \mathbb{Z}[G] \stackrel{\times N}{\to} \mathbb{Z}[G]$$

donne une résolution libre de $\mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}[G]$-module trivial.

(2) En déduire le calcul de $H_k(G, \mathbb{Z})$ et $H^k(G, \mathbb{Z})$ pour $k \ge 0$.

(3) En déduire le calcul de $H_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ et $H^*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Exercice 7 - Dimension globale, Exam 2023

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec assez de projectifs. On appelle *dimension globale* de $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{gldim}(\mathcal{A}) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists A, B \in Ob(\mathcal{A})\ : \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, B) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Si $M \in \mathcal{A}$, on appelle *dimension projective* de M notée $\mathrm{pdim}(M)$, le plus petit n tel qu'il existe une résolution projective de M de la forme

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

S'il n'existe pas de résolution projective finie on pose $\mathrm{pdim}(M) = \infty$.

On dit que $\mathcal{A}$ est *semisimple* si $\mathrm{gldim}(\mathcal{A}) = 0$ et $\mathcal{A}$ est *héréditaire* si $\mathrm{gldim}(A) \le 1$. On peut supposer que les objets de $\mathcal{A}$ sont des modules (à droite) sur un anneau unitaire associatif A.

(1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) $\mathcal{A}$ est semisimple.

(b) Tout objet de $\mathcal{A}$ est projectif.

   (c) Tout objet de $\mathcal{A}$ est injectif.
   (d) Toute suite exacte courte est scindée.

(2) Donner un exemple d'anneau dont la catégorie des modules est semisimple.

(3) Soit $M \in \mathcal{A}$, démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\mathrm{pdim}(M) \leq n$.
   (b) $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, X) = 0$ pour tout $i > n$ et tout $X \in \mathcal{A}$.
   (c) $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(M, X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{A}$.
   (d) Si $0 \to M_n \to P_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ est une suite exacte avec P_i projectifs pour tout i, alors M_n est projectif.

(4) Justifier que $\mathrm{gldim}(\mathcal{A}) = \sup\{\mathrm{pdim}(M) \mid M \in \mathcal{A}\}$.

(5) Ici on suppose que les objets de $\mathcal{A}$ sont des modules. Démontrer que $\mathcal{A}$ est héréditaire si et seulement si tout sous-module d'un module projectif est projectif.

(6) Soit A une k-algèbre de dimension finie. Montrer que la catégorie des A-modules de dimension finie est héréditaire si et seulement si tout idéal à droite de A est projectif.

(7) Une k-algèbre A de dimension finie sur un corps k est dite *auto-injective* si le module régulier $A \in \operatorname{mod} A$ est injectif. Montrer que dimension globale de $\operatorname{mod} A$ est alors 0 ou ∞.

(8) Soient $n \geq 1$ et k un corps. Montrer que $A = k[X]/(X^n)$ est auto-injective et en déduire la dimension globale de $\operatorname{mod} A$. Indication, on pourra utiliser le critère de Baer.