

le 17/03/2020 Modules fidèles et équilibrés, combinatoire de tableaux de Young et d'arbres binaires

En commun avec W. Crawley-Boevey
B. Ma et J. Santa

I. Introduction algébrique

Dans cet exposé A est une algèbre de dimension finie sur un corps k . Les modules sont à gauche et de dimension finie.

Def

Soit M un A -module, alors M est **fidèle et équilibré** si l'application

$$A \longrightarrow \text{End}_{\text{End}(M)}(M) \text{ est un isomorphisme}$$
$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & \left[\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & M \\ m & \longmapsto & a.m \end{array} \right. \end{array}$$

Remarques (1) Ces modules ont beaucoup de noms : modules avec la propriété de double centralisateur, modules stratifiés, modules avec dimension fidèle au moins 2 ...
(2) Ils sont communs dans la littérature sur la théorie des anneaux
ex : dualité de Schur-Weyl, théorie de Morita, algèbres "quasi-Jacobson" de Thiel
...
(3) Ils sont assez mystérieux...

Pourquoi s'y intéresser ?

(1) Cette famille de modules contient de nombreux modules intéressants : les générateurs, les modules basculants, les cogénérateurs et les modules co-basculants.

(2) Ils semblent avoir une combinatoire très intéressante !

II. Résultats principaux

On considère un cas extrêmement simple : $n \in \mathbb{N}$ et $\Lambda_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & k \end{pmatrix}$ l'algèbre des matrices triangulaires inférieures de taille n .

Rq $\Lambda_n = k(1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n)$ l'algèbre de chemins de type A équilibrée

Alors on va compter les classes d'isomorphismes de Λ_n -modules fidèles et équilibrés binaires. Binaire veut dire que chaque facteur de i est décomposable apparaît au plus une fois.

Thm A 1) Il y a $[n]_2! = \prod_{i=1}^n (2^i - 1)$ classes d'iso de A_n -modules fidèles et équilibrés

2) Un tel module possède au moins n facteurs directs indecomposables

3) $f_b(n) := \{M \in A_n\text{-mod} \mid M \text{ est fidèle et équilibré et } |M| = n\}$

alors $|f_b(n)| = n!$

Rq $n! = |S_n|$ et S_n est le groupe de Weyl en type A. De plus $[n]_2!$ est le nombre de drapeaux complets dans \mathbb{F}_2^n . C'est-à-dire le nombre de points dans la variété drapeaux de type A.

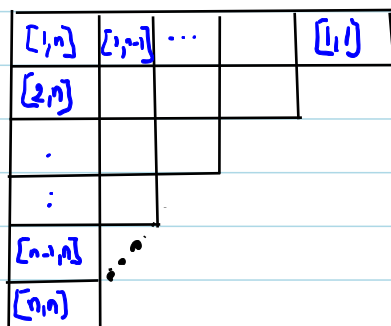
Question: Est-ce de la combinatoire de type A?

Réponse: Je ne sais pas mais: notre démonstration ne l'est pas et ces nombres dépendent de l'orientation du diagramme de Dynkin.

III Idée de la démonstration

A_n est une algèbre hies particulière: elle est de type de représentation fini, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un nombre fini de modules indecomposables. Ces modules indecomposables sont en bijection avec les intervalles $[i, j]$ où $1 \leq i \leq j \leq n$

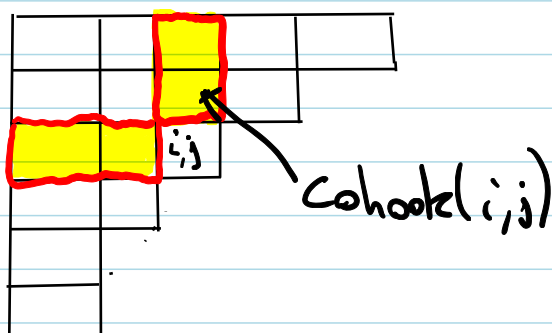
Il y en a donc $\frac{n(n-1)}{2}$ modules indecomposables que l'on va représenter dans un diagramme de Young triangulaire supérieur



Se donner un A_n -module bonique revient à choisir quels modules

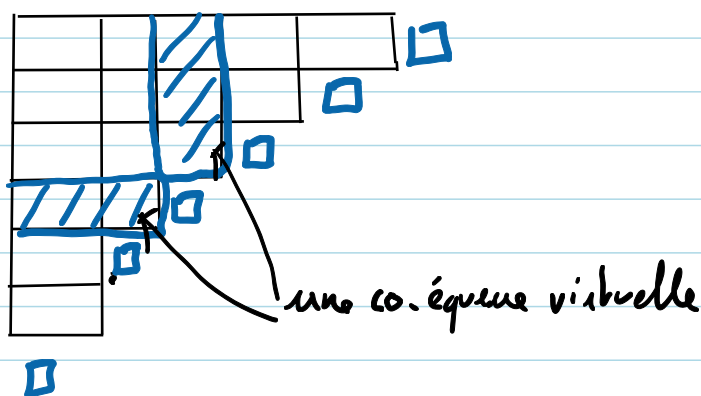
indecomposables apparaissent dans le module. Donc il y a une bijection entre les modules bariques et les remplissages du tableau par des \bullet qui indiquent quels sont les facteurs indecomposables du module.

Def si $[i, j]$ est un intervalle alors $\text{cohook}(i, j) = \{[k, i] \mid 1 \leq k < i\} \cup \{[i, \ell] : n > \ell > j\}$



Informellement la co-équerre en (i, j) est l'union des boîtes à gauche et au dessus de $[i, j]$.

On va maintenant ajouter des "boîtes virtuelles" ou des feuilles à notre tableau: une à la fin de chaque ligne.



On peut définir la co-équerre d'une boîte virtuelle de façon évidente. On parle alors de co-équerre virtuelle.

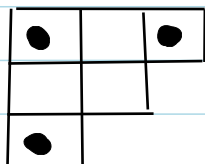
Thm B Un Λ_n -module M est fidèle et équilibré si son tableau de Young possède les propriétés suivantes

(FB0) La boîte $[1, n]$ est non vide

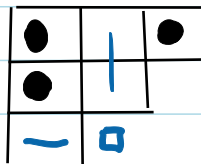
(FB1) si $[i, j] \neq [1, n]$ et $[i, j] \neq \emptyset$ alors $\text{cohook}(i, j) \neq \emptyset$

(FB2) Les co-équerres virtuelles sont non vides

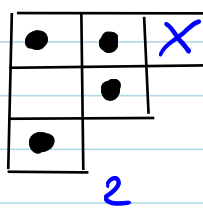
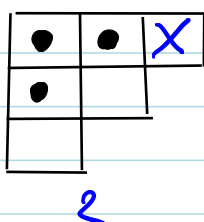
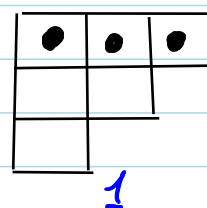
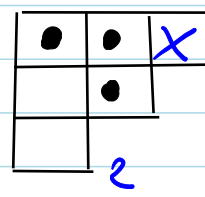
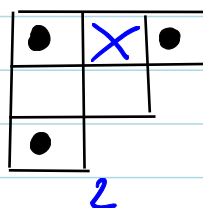
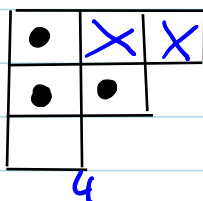
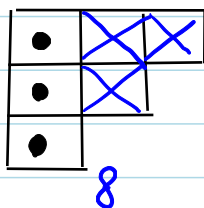
Exemples



est fidèle et équilibré



ne l'est pas car une colonne virtuelle est vide



Ces 7 diagrammes représentent les 2^1 modules fidèles et équilibrés pour $n=3$. Pour obtenir un module choisi en diagramme et ajouter un nombre arbitraire de points dans les cases possédant une croix

Grâce à cette formulation combinatoire, on peut compter ces objets :

Thm C Dans le développement de $h_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \left(\prod_{s=1}^R (1+x_s) - 1 \right)$ le coefficient du monôme $x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}$ est le nombre de modules fidèles et équilibrés avec h_i facteurs indécomposables dans la ligne i du diagramme.

le Théorème A a une conséquence directe

IV - Combinatoire bijective

Est-il connu que les configurations induites par les modules fidèles et équilibrés sont comptés par $[n]_2!$?
 ↳ nous n'avons rien trouvé dans la littérature.

Revenons sur $[n]_2!$ et $n!$, $[n]_2!$ compte les diagrammes complets dans \mathbb{F}_2^n et $n!$ les permutations.

Il est connu que la variété des plans de type A possède une décomposition en cellules de Schubert qui sont indexées par S_n . Donc dans l'idéal on aimerait une bijection qui s'y fit.

↳ Je n'ai pas réussi, ni plus modestement je n'ai pas réussi à donner une démonstration bijective de $\dim \mathcal{V}$.

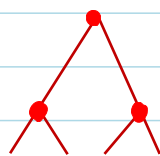
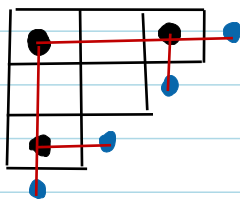
Intéressons nous au cas des modules à n facteurs directs indécomposables

$|\text{Irr}(n)| = n!$ et dans cette section nous allons donner une démonstration bijective de ce résultat.

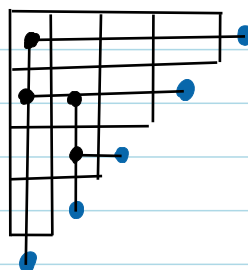
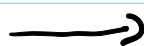
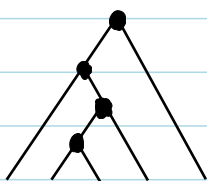
Rappel Un Λ_n -module T est dit basculant si $|T| = n$ et $\text{Ext}^i(T, T) = 0$ on note Tilt_n l'ensemble des Λ_n -modules basculants.

- Comme expliqué au début de l'exposé, les modules basculants sont fidèles et équilibrés.
- [Gabriel] $|\text{Tilt}_n| = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n$ le n ième nombre de Catalan
- Il y a une bijection entre les arbres binaires et les Λ_n -modules basculants elle est très naturelle : il suffit de placer l'arbre binaire dans le diagramme de Young

Ex



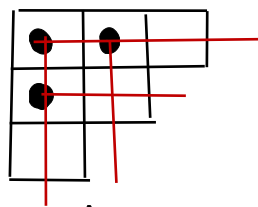
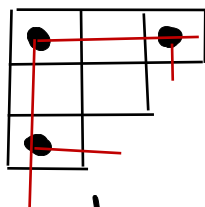
les feuilles donnent les cas donnés des sommets dans le diagramme.



Il faut se convaincre que $\text{Ext}^i(T, T) = 0$ (\Leftrightarrow) pas de croisements dans l'arbre.

l'idée est d'étendre cette construction aux modules fidèlement balancés


Problème



Et ces deux arbres sont égaux en tant que graphes. Pour palier ça on va "fixer" la position des feuilles.

L'arbre T_1 a 12 classes sous arbre droit et l'arbre T_2 a 13 dans son sous arbre gauche.

Les modèles fidèles et équilibrés avec n facteurs directs indecomposables sont donc en bijection avec ce type d'objets que l'on appelle "interleaved tree". Intuitivement c'est un arbre binaire avec un shuffle de ses feuilles.

Regardons l'arbre T_2 

en rebrianant le croisement on trouve un "arbre à niveau". En rendant explicite tout ce que j'ai fait avec les mains ici on obtient

Thm D Soit $n \in \mathbb{N}$, il y a des bijections explicites entre

- (1) $f_b(n)$
- (2) les arbres brycaisés à n sommets internes
- (3) les arbres binaires décroissants (= arbres à niveau) avec n sommets internes
- (4) les fonctions $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ telles que

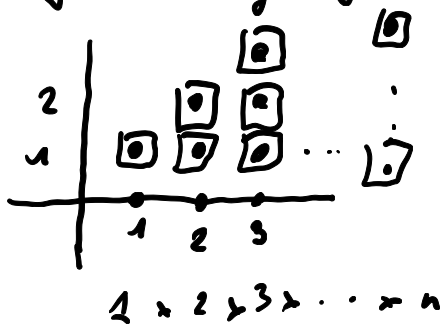
$$f(i) \leq i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

qui se restreignent en bijections entre

- (1) $Tilt(n)$
- (2) les arbres binaires à n sommets internes "
- (3) arbres " décroissants " bien ordonnés
- (4) les fonctions $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ tq $f(i) \leq i$
croissantes

Rq (1) Il est bien connu que les arbres binaires décroissants sont en bijection avec les permutations.

(2) les fonctions $f: f(i) \leq i$ sont clairement comptées par $n!$



(3) Il y a aussi une bijection entre $fb(n)$ et les "tree-like tableaux" de Aval, Bousquet-Mélou et Nadeau

V - Ordre partiel

L'ensemble des arbres binaires est habituellement muni d'une structure d'ordre partiel où les relations de successeurs consistent à remplacer



localement. C'est ce qu'on appelle le treillis de Tamari.

Cette relation d'ordre correspond via la bijection de la section précédente à la mutation des modules basculants. Donc l'ensemble des modules basculants avec cette relation de mutation est isomorphe au treillis de Tamari.

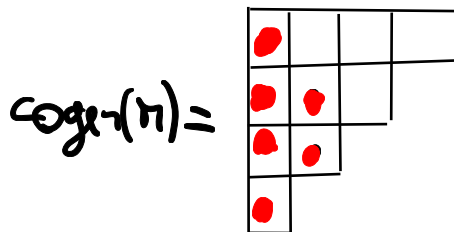
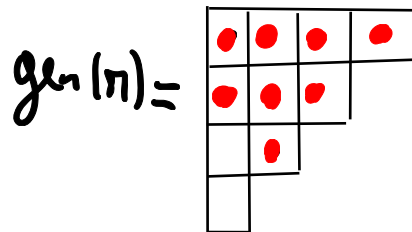
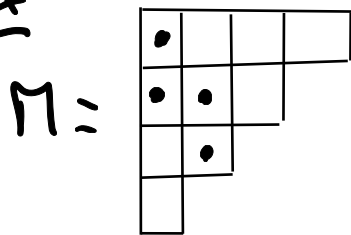
On va étendre ça en un ordre partiel sur $fb(n)$

Def Soient $M, N \in \mathcal{fb}(n)$ alors $M \leq N \Leftrightarrow \begin{cases} \text{cogen}(M) \subseteq \text{cogen}(N) \\ \text{gen}(M) \subseteq \text{gen}(N) \end{cases}$

où $(\text{co})\text{gen}(M)$ est la catégorie des modules (co)engendrés par M

En terme de diagramme $\text{cogen}(M)$ consiste à remplir les boîtes sous les \bullet de gen les boîtes à droite des \bullet .

Ex



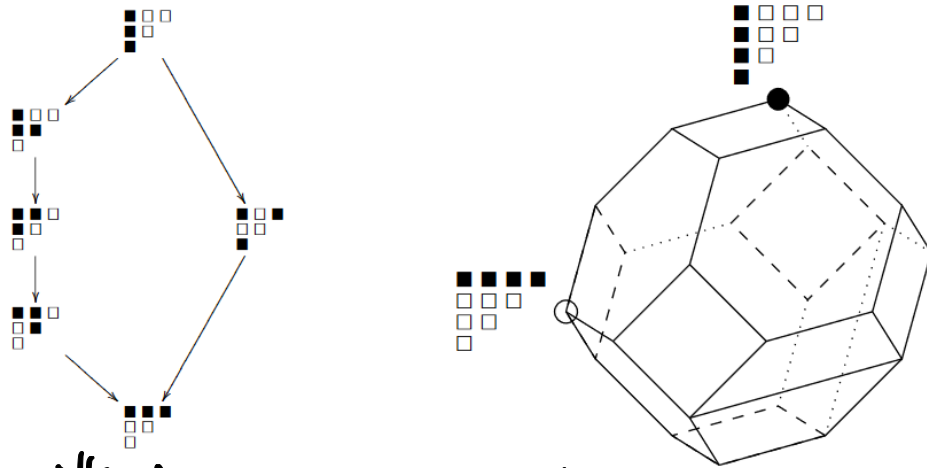
On obtient alors

- Thm E (1) $(\mathcal{fb}(n), \leq)$ est un treillis
 (2) $(\text{ThPt}(n), \leq)$ est un sous-treillis de $(\mathcal{fb}(n), \leq)$
 $\text{ThPt}(n) \cong \text{Tam}_n$

On obtient donc un treillis sur $n!$ qui "étend" le treillis de Tamari et qui semble nouveau.

Ce treillis semble particulièrement joli car

Conj $(\mathcal{fb}(n), \leq)$ est un treillis semi-distributif.



les recillis $f_b(n)$ pour $n=3$ et 4 .

VI - Généralisation

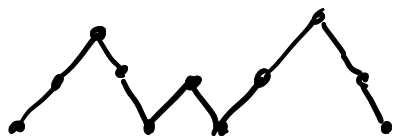
Le Théorème B est valable dans une plus grande généralité: il s'applique pour les algèbres de Nakagawa. Sans entrer dans les détails ce sont des algèbres qui ont de très bonnes propriétés:

- (1) Elles sont de type de représentation fini (donc on peut compter...)
- (2) Elles sont "uniserials" ce qui veut dire que les modules indecomposables ont une unique série de composition (à la Jordan Holder)

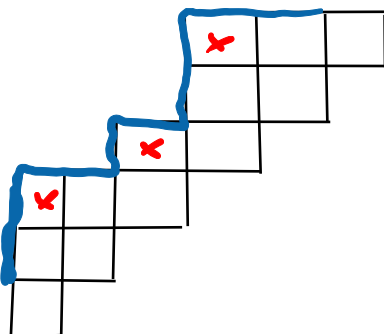
Elles se répartissent en deux familles → les acycliques
 → les cycliques

Les acycliques sont en bijection avec les chemin de Dyck

Ex




donne une algèbre de Nakagawa où la catégorie de modules est représentée par le diagramme



x : sommets

La bijection est donnée par le "bord" de la catégorie de modules représentée via son couple de A et la donnée Rietan

Un module fidèle et équilibré correspond à un remplissage
vérifiant les règles de Co. équies et tel que chaque coin (= sommet
du chemin de Dyck) soit non vide

Pour les chemins de Dyck qui sont des concatenations de  ,
nous avons une formule pour le nombre de modules fidèles et équilibrés

(Ex ici il y en a 576) mais il semble difficile d'obtenir une formule
dans le cas général.

Rq •) Theo E et ses cong doivent s'étendre sans effort à ce contexte

•) Les algèbres de Nakayama cycliques correspondent aussi à
des chemins de Dyck dit periodiques mais je n'ai pas vraiment
regardé ce qu'il se passe ici (Thm B s'applique toujours).