ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
13. PRÄSENZBLATT

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie: Es gibt keinen Ringisomorphismus von $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ nach $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.
(b) Zeigen Sie: $2, 5, (2+\sqrt{-6})$ und $(2-\sqrt{-6})$ sind irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ nicht faktoriell ist.
(c) Zeigen Sie: In $\mathbb{Z}[i]$ gilt $(2+i)(2-i) = 5 = (-1-2i)(1+2i)$. Warum ist dies kein Widerspruch dazu, dass $\mathbb{Z}[i]$ faktoriell ist?
(d) Zeigen Sie: 2 ist irreduzibel aber keine Primzahl in $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler

$$\mathsf{ggT}(16+7i, 10-5i) \text{ und } \mathsf{ggT}(1-13i, 4+i) \text{ in } \mathbb{Z}[i].$$

Aufgabe 3. Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Welche der ersten fünf Primzahlen sind träge, zerlegt oder verzweigt in R?

Aufgabe 4. [optional] Seien $d \in \mathbb{Z}$ quadratfei und $A = \{\begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} \ ; \ a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq M_2(\mathbb{Q})$.

(a) Zeigen Sie, dass A ein Ring ist.
(b) Sei $\phi : \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \to A$ definiert durch $\phi(a+\sqrt{d}b) = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass ϕ ein Isomorphismus von Ringen ist.
(c) Sei $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zeigen Sie: $N(\alpha) = \det(\phi(\alpha))$ und $\mathrm{Tr}(\alpha) = \mathrm{Spur}(\phi(\alpha))$.
(d) Sei $\alpha = a + \sqrt{d}b \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit $b \neq 0$. Zeigen Sie, dass m_α das charakteristische Polynom von $\phi(\alpha)$ ist.