

ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
3. ÜBUNGSBLATT

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1. [2+2 Punkte]

(b) Sei $a \in \mathbb{N}_{>0}$. Sei b eine reelle Zahl mit Kettenbruch $[\bar{a}] = [a, a, a, \dots]$. Zeigen Sie:

$$b = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

(c) Was ist die reelle Zahl mit Kettenbruch $[3, \overline{2, 6}]$?

Aufgabe 2. [3 Punkte]

Lösen Sie die diophantische Gleichung

$$8x + 6y + 3z = 10.$$

Aufgabe 3. [1+2+2 Punkte]

Bewisen Sie den folgenden Satz, indem Sie (a), (b), (c) siehe unten, folgen.

Satz: Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Die Elemente von $\{1, 2, \dots, 2k\}$ können in disjunkte Paare aufgeteilt werden, so dass die Summe der Elemente in jedem Paar prim ist.

(a) Zeigen Sie den Satz für $k = 1, 2, 3, 4$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Primzahl $p \in [2k + 1, 4k - 1]$ gibt.

(c) Zeigen Sie den Satz mit Induktion.

(Hinweis: $\{1, 2, \dots, 2k\} = \{1, 2, \dots, m - 1\} \cup \{m, m + 1, \dots, 2k - 1, 2k\}$ für $m = p - 2k$).

Aufgabe 4. [4 Punkte] Sei $n \in \mathbb{N}$ so dass $n \geq 2$. Zeigen Sie dass $\pi(n^2) \geq n$.