ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
6. ÜBUNGSBLATT

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1. [2+2 Punkte]

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen x modulo 225 des folgenden Systems von Kongruenzen:

$$\begin{cases} 10x \equiv 15 \pmod{25} \\ 3x \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen x modulo 459 des folgenden Systems von Kongruenzen:

$$\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{27} \\ 12x \equiv 9 \pmod{51} \end{cases}$$

Aufgabe 2. [4 Punkte] Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

$$\mathbb{Z}[X]/(X,p) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 3. [2+2 Punkte] Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in R$ heißt nilpotent, falls eine natürliche Zahl k existiert, so dass $x^k = 0$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $N := \{x \in R \ ; \ x \text{ ist nilpotent}\}$ ein Ideal ist. N heißt das Nilradikal von R.
(b) Was ist das Nilradikal von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Aufgabe 4. [2+2 Punkte]

(a) Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$. Seien $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und $S_f(m) = |\{\overline{k} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \ ; \ f(\overline{k}) = \overline{0}\}|$. Zeigen Sie, dass $m \mapsto S_f(m)$ multiplikativ ist.
(b) Eine natürliche n Zahl heißt quadratfrei, wenn alle Primfaktoren der Zahl n nur in der ersten Potenz auftreten.

Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es eine Folge $x, x+1, \cdots, x+k-1$ von k aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gibt, so dass kein Element von ihr quadratfrei ist.

(Hinweis: Seien $p_1, p_2, \cdots, p_k$ paarweise verschiedene Primzahlen. Finden Sie eine simultane Kongruenz modulo p_i^2, $1 \leqslant i \leqslant k$ deren Lösung x gibt.)

Abgabe: Freitag, 25. Mai 2018, bis 10 Uhr in die Postfächer der Tutoren in V3-126.