ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
7. ÜBUNGSBLATT

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1. [4 Punkte] Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>1}$. Zeigen Sie: Wenn $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt, dann gilt $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$.

Aufgabe 2. [1+1+2 Punkte] Sei $\mathbb{Z}[i] := \{a + b \cdot i \,;\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Untering von $\mathbb{C}$ ist.
(b) Zeigen Sie:
$$\bar{i} = \overline{3} \in \mathbb{Z}[i]/(1 + 3i) \text{ und } \quad \overline{10} = \overline{0} \in \mathbb{Z}[i]/(1 + 3i).$$
(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]/(1 + 3i) \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ gilt.
(Hinweis: Betrachten Sie $\phi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$ definiert durch $\phi(a + ib) = \overline{a} + \overline{3b}$ und $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]/(1 + 3i)$ definiert durch $\psi(n) = \overline{n}$.)

Aufgabe 3. [4 Punkte] Berechnen Sie mit Hilfe des Euler Satz:
$$\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}_{2018} \pmod{100.}$$

Aufgabe 4. [2+2 Punkte] Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>1}$.

(a) Was sind die Ringhomomorphismen[1] von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
(b) Sei $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$. Was sind die Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

Abgabe: Freitag, 1. Juni 2018, bis 10 Uhr in die Postfächer der Tutoren in V3-126.
[1] mit $f(1) = 1$