

**ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE**  
**9. ÜBUNGSBLATT**

DR. BAPTISTE ROGNERUD

**Aufgabe 1.** [2+2 Punkte]

- (a) Finden Sie eine Primitivwurzel für  $5^{10}$ .
- (b) Finden Sie eine Primitivwurzel für 250.

**Aufgabe 2.** [3+1 Punkte]

- (a) Sei  $m \in \mathbb{N}_{>1}$  so, dass es eine Primitivwurzel modulo  $m$  gibt. Zeigen Sie, dass es  $\phi(\phi(m))$  Primitivwurzeln modulo  $m$  in  $\{1, 2, \dots, m-1\}$  gibt.
- (b) Wie viele Primitivwurzeln modulo 30 und modulo 101 gibt es?

**Aufgabe 3.** [3+1 Punkte]

- (a) Sei  $p$  eine Primzahl, so dass  $p \equiv 1 \pmod{4}$  gilt. Zeigen Sie, dass  $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  genau dann eine Primitivwurzel modulo  $p$  ist, wenn  $-a$  eine Primitivwurzel modulo  $p$  ist.  
(Hinweis: Sie dürfen Präsenzaufgabe 9.3 verwenden.)
- (b) Sei  $p$  eine beliebige Primzahl. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Aussage in Teil (a) an.

**Aufgabe 4.** [4 Punkte]

- (a) Sie  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Zeigen Sie:

$$3^{2n} \equiv 1 + 2^{n+2} \pmod{2^{n+3}},$$

mit Induktion.

- (b) Zeigen Sie, dass  $\text{ord}_{2^n}(3) = 2^{n-2}$  für  $n \geq 3$ .