Examples
(1) A ring then $\mathrm{Mod}A$, $A\mathrm{Mod}$ + fg version are additive
(2) $\mathcal{C}$ additive $\mathcal{C}^{op}$ is additive
(3) $\mathcal{C}$ additive, I category then $\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$ is additive
(4) A ring then $BA = \underset{\circlearrowright A}{\bullet}$ is preadditive but not additive

Def 4.5 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ be a functor between two additive categories. Then F is an additive functor if $\forall x,y \in Ob(\mathcal{C})$, $f \mapsto F(f)$ from $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$ to $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Fx,Fy)$ is a group homomorphism.

Prop 4.6 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ is additive iff $F(0) \simeq$ and $F(x\oplus y) \simeq F(x) \oplus F(y)$

idea: $\Rightarrow$ clear
$\Leftarrow$ need to see the relation between $\oplus$- and gp structure on hom-space
cg Assem Caro 2.9. $\square$

II – Chain complexes in additive categories

In this section all categories are additive. $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ are such cat.

Def 4.7 (1) A chain complex in $\mathcal{C}$ is a collection of objects of $\mathcal{C}$ $C_\bullet = \{ C_n \mid n \in \mathbb{Z}$, ~~[illegible]~~$\}$ with applications $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ called differentials such that $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ ("$\partial^2 = 0$")

(2) A cochain complex in $\mathcal{C}$ is a collection $C^\bullet = \{ C^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ of objects of $\mathcal{C}$ together with $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$; $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$

Rem If $C_\bullet$ is a chain complex we can see it as a cochain complex by letting $(C')^n = C_{-n}$ and $\delta^n = \partial_{-n}$

So formally it is the same mathematical object but in general chain and cochain represent different objects so we will distinguished ~~[illegible]~~ them.

Def 4.8 Let $C_\bullet$ and $D_\bullet$ two chain complexes in $\mathcal{E}$. A morphism of chain complexes from $C_\bullet$ to $D_\bullet$ is a collection $f_n : C_n \to D_n$ of morphisms in $\mathcal{E}$ s.t.

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "\partial_n^C"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
D_n \arrow[r, "\partial_n^D"'] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

" $\partial f = f \partial$ "

Def 4.9 Let $\mathcal{E}$ be an additive category. We denote by $Ch_\bullet(\mathcal{E})$ the category where objects are chain complexes and morphisms, the morphisms of chain complexes

Similarly we have $Ch^\bullet(\mathcal{E})$ the category of cochain complexes.

Rem (1) There are very usefull subcategories $Ch_b(\mathcal{E})$, $Ch_+(\mathcal{E})$, $Ch_-(\mathcal{E})$

↑ bounded

↑ concentrated in ≥ 0 deg

↑ in negative degrees.

(2) On can also speak about double complexes

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & X_{m,n} \arrow[r, "d^h_{m,n}"] \arrow[d, "d^v_{m,n}"'] & X_{m-1,n} \arrow[r] \arrow[d, "d^v_{m-1,n}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X_{m,n-1} \arrow[r, "d^h_{m,n-1}"'] \arrow[d] & X_{m-1,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}$$

with $d^h \circ d^h = 0$

$d^v \circ d^v = 0$

$d^v \circ d^h = d^h \circ d^v$.

(3) $Ch(\mathcal{E})$ is an additive category si $(X_\bullet \oplus Y_\bullet)_i = X_i \oplus Y_i$ with $d_x \oplus d_y$ for the differentials.

Méthodes simpliciales

Δ la catégorie dont les objets sont les ordres totaux et les morphismes les applications préservant l'ordre.

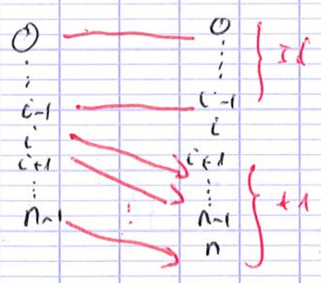
[On a $\Delta \simeq$ catégorie dont les objets sont $[n] = \{0,1,\dots,n\}$ avec l'ordre total habituelle et les applications croissantes comme morphismes] Dans la suite on va plutôt travailler avec cette version discrète.

Déf 4.10 ① Un ensemble simplicial est un foncteur contravariant de Δ vers Ens

② Si $\mathcal{E}$ est une catégorie. Un objet simplicial est un foncteur contravariant de Δ vers $\mathcal{E}$.

Notation: $X : \Delta^{op} \to \mathcal{E}$ $\quad X_n := X([n])$. Les éléments de X_n (qd $\mathcal{E} = \mathrm{Set}$) sont les n-simplexes de X

On a $\forall\, i \in [n]$ $\quad d^i : [n-1] \to [n]$ l'application injective qui "rate" i



On note $d_i = X(d^i) : X_n \to X_{n-1}$ l'application induite.
C'est une application appelée "face".

Soit X un groupe abélien simplicial (i.e. $X : \Delta^{op} \to Ab$)

Alors on peut définir un complexe $(X_\bullet, \partial)$ appelé complexe de Moore de la façon suivante.

$i \in [\cancel{0,n}]$ $\to d^{i} : [n-1] \to [n]$

$X_n = X([n])$ and $\partial_n : X_n \to X_{n-1}$

$x \longmapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \overset{X(d^i)(x)}{d_i}(x)$

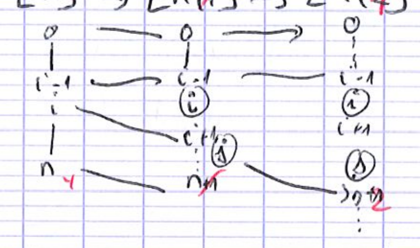
Prop 4.11 (1) $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ est un complexe de chaines de groupes abeliens

(2) $M \longmapsto M_\bullet$ est un foncteur de sAb vers $Ch(Ab)$

Proof Pour le (1) on utilise : $\forall\ 0 \leq i < j \leq n+\cancel{2}1$

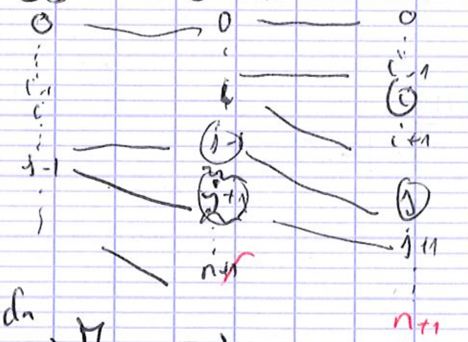
$$\boxed{d^{j}_{n\cancel{+1}} \circ d^{i}_{n-1} = d^{i}_{n\cancel{+1}} \circ d^{j-1}_{n-1}} : [n-1] \to [n+1]$$

en effet left : $[n\cancel{]}] \to [n+\cancel{1}] \to [n+\cancel{2}]$



misses i and j

and $[n\cancel{]}] \to [n+\cancel{1}] \to [n+\cancel{2}]$



misses i and j.

Vérifions $M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow$

$X_{n+1} \to X_n \to X_{n-1}$

$\updownarrow$

$[n-1] \to [n] \to [n+1]$

$d_n d_{n+1} = 0$? Soit $x \in M_{n+1}$

Alors $d_n \circ d_{n+1}(x) = \sum^{n} \sum^{i} M(d_{n+1} \circ d_n)(x)$

$= \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{n\cancel{+1}} (-1)^{i+j} M(d_j^{n+1} \circ d_i^{n})$

$= \sum_{0 \leq i < j \leq n+\cancel{2}1} (-1)^{i+j} M(d_j^{n+1} \circ d_i^{n}) + \sum_{0 \leq j \leq i \leq n\cancel{+1}} (-1)^{i+j} M(d_j^{n+1} \circ d_i^{n})$

$$= \sum_{0\leq i<j\leq n+\cancel{2}} (-1)^{i+j} M(d_i^{n+1}\circ d_{j-1}^{n}) + \sum_{0\leq j\leq i\leq n+\cancel{1}} (-1)^{i+j} M(d_j^{n+1}\circ d_i^{n})$$

$$= \sum_{0\leq i\leq j\leq n+\cancel{1}} (-1)^{i+j+1} M(d_i^{n+1}\circ d_j^{n}) + \sum_{0\leq j\leq i\leq n+\cancel{1}} (-1)^{i+j} M(d_j^{n+1}\circ d_i^{n})$$

$$= 0$$

(2) $\begin{array}{c} M \\ \downarrow \eta \\ N \end{array}$ nat trans alors

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "M(d_{n-1})"] \arrow[d, "\eta_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[d, "\eta_{n-1}"] \\ N_n \arrow[r, "N(d_{n-1})"'] & N_{n-1} \end{tikzcd}$$

car η nat trans. □

Application : complexe de chaînes singulières

Idée associer à tout espace topologique un complexe de chaînes via une suite "naturelle" de foncteurs :

$$\mathrm{Top} \xrightarrow{S} s\,\mathrm{Set} \xrightarrow{F} s\mathrm{Ab} \xrightarrow{\mathrm{Moore}} \mathrm{Ch}_+(\mathbb{Z})$$

- $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Ab}$, $X \longmapsto \mathbb{Z}[X]$ free abelian gp functor

⇝ $s\,\mathrm{Set} \xrightarrow{F} s\mathcal{A}b$ clairement un foncteur.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] & \Delta \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "F\circ X"'] & \mathrm{Set} \arrow[r, "F"] & \mathcal{A}b \end{tikzcd}$$

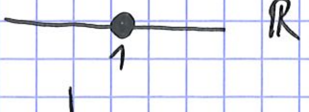
⇝ Moore est le foncteur précédent qui construit un complexe de chaîne depuis un gpe abelien simplicial.

(a) S est un foncteur "représentable" :

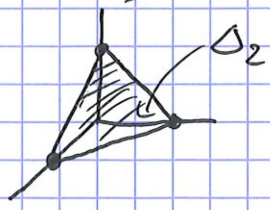
$|\Delta|$ ~~X~~ : $\Delta \to \mathrm{Top}$
$[n] \longmapsto$ simplexe standard topologique Δ_n

$$\Delta_n = \left\{ (x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;/\; \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \text{ et } x_i \geq 0 \right\} = \mathrm{Conv}(e_0,\dots,e_n)$$

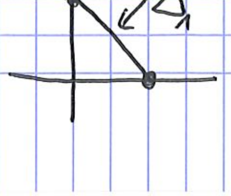
Ex Δ_0



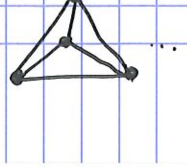
Δ_2



Δ_1



Δ_3



…

On veut rendre fonctoriel $\overset{|\Delta|}{\cancel{\Delta}}$ pour ça on définit $|\Delta|(d^i)|$, ce qui est suffisant pour notre histoire car le foncteur "Moore" n'utilise que les d^i.

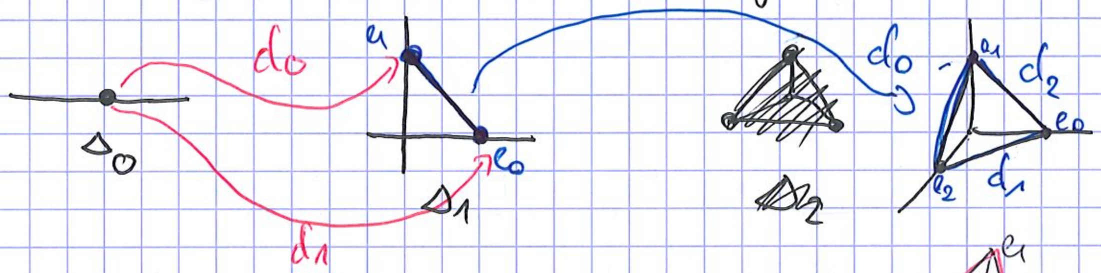
Rem Ça n'est pas suffisant pour la fonctorialité, voir plus bas.

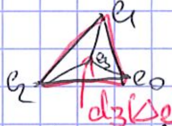
$d^i : [n-1] \to [n]$ qui "rate" i

On pose $|\Delta|(d_i) : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$
"d_i" $(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$

↳ $|\Delta|(d^i)$ envoie les Δ_{n-1} sur la i-ème face de Δ_n

Ex





Rem Comment rendre $|\Delta|$ fonctoriel

① $\Delta_{inj} \subseteq \Delta$ consistant en les applications injectives. Alors toute application injective est une composée de d_i (semi-simplicial sets)

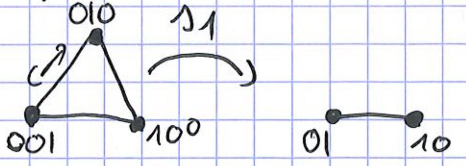
ou

② $s_i : [n+1] \to [n]$ codégénérescence (codegeneracy maps)
où i et $i+1$ vont sur i : "i est frappé 2 fois"

Fact : Δ est engendrée par d_i et s_i. Donc il suffit de définir $\Delta(s_i) : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$

$(x_0, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1})$

géométriquement :



s^i : projette le Δ_{n+1}-simplexe sur le n simplexe orthogonal à la i face

$$\Delta_{inj} = \left(\emptyset \xrightarrow[d_0^{-1}]{} \right) [0] \overset{d_0^0}{\underset{d_1^0}{\rightrightarrows}} [1] \overset{d_0^1}{\underset{d_2^1 \;\; d_1^1}{\rightrightarrows\!\!\!\to}} [2] \rightrightarrows\!\!\rightrightarrows [3] \dots$$