PRODUITS TENSORIELS, CATÉGORIES ADDITIVES ET COMPLEXES DE CHAINES

Les questions et exercices $*$ peuvent être ignorées.

1. Produit tensoriel

Exercice 1 -

(1) Montrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(n,m)\mathbb{Z}$. Que se passe-t-il si m et n sont premiers entre eux ?

(2) Plus généralement, soient R un anneau unitaire (pas nécessairement commutatif) et I et J deux idéaux bilatères. Démontrer que $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J)$.

(3) Démontrer que le produit tensoriel est associatif.

Exercice 2 - Groupe de Picard

(1) Soit k un corps et n un entier. Démontrer que la catégorie des modules (à gauche) sur l'algèbre $M_n(k)$ est équivalente à la catégorie des k-espaces vectoriels. Indication, on pourra considérer $V = k^{n,1}$ les vecteurs colonnes de taille n dans k et $W = k^{1,n}$ les vecteurs lignes de taille n dans k et considérer les foncteurs $V \otimes_k -$ et $W \otimes_{M_n(k)} -$.

(2) Soient A et B des k-algèbres telles que $A\,\mathrm{Mod}$ et $B\,\mathrm{Mod}$ sont équivalentes. Déduire de la première question que A et B n'ont pas nécessairement des groupes d'automorphismes isomorphes. De même leurs groupes des unités ne sont pas nécessairement isomorphes.

(3) Soit k un anneau commutatif et A une k-algèbre. Si X est un A-A-bimodule, on note par $[X]$ sa classe d'isomorphisme en tant que A-A-bimodule et on dit que X est *inversible* s'il existe un A-A-bimodule Y tel que $[X \otimes_A Y] = [Y \otimes_A X] = [A]$. Justifier que le produit tensoriel au dessus de A induit une structure de groupe sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de A-bimodules inversibles. On l'appelle le *groupe de Picard* de A et on le note $\mathrm{Pic}(A)$.

(4) Soit M un bimodule inversible. Démontrer que $\mathrm{End}_A(M) \cong A^{op}$.

(5) Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}_k(A)$. Justifier brièvement que l'application $-\cdot-\cdot- : A\times A\times A \to A$ définie par $a\cdot x\cdot b = ax\alpha(b)$ munit A d'une structure de A-bimodule. On note par ${}_1A_\alpha$ ce bimodule.

(6) Démontrer que $\alpha \mapsto {}_1A_\alpha$ induit un homomorphisme Φ de groupes de $\mathrm{Aut}_k(A)$ vers $\mathrm{Pic}(A)$ dont le noyau est $\mathrm{Inn}(A)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de A. On note $\mathrm{Out}_k(A)$ le groupe $\mathrm{Aut}_k(A)/\mathrm{Inn}(A)$.

(7) * Soient M et N deux bimodules inversibles. Démontrer que M et N sont isomorphes en tant que A-modules à gauche si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}_k(A)$ tel que $M \cong N \otimes_A {}_1A_\alpha$ en tant que A-bimodules. (On pourra commencer par supposer que $N = A$, puis on s'y ramène en utilisant l'inversibilité de N).

(8) * En déduire que l'image de Φ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de A-A-bimodules qui sont libres de rang 1 en tant que A-module à gauche.

(9) * On peut montrer que
- $\mathrm{Pic}(A)$ est invariant par équivalence de catégories : si A et B sont deux k-algèbres telles que $\mathrm{Mod}\,A \cong \mathrm{Mod}\,B$, alors $\mathrm{Pic}(A) \cong \mathrm{Pic}(B)$.
- Il y a un homomorphisme de groupe Γ de $\mathrm{Pic}(A)$ vers $\mathrm{Aut}_k(Z(A))$. On note $\mathrm{Picent}(A)$ le noyau de Γ. Si A est une algèbre commutative, alors $\mathrm{Pic}(A) = \mathrm{Picent}(A) \rtimes \mathrm{Aut}_k(A)$.
- Dans certains cas le groupe de Picard de A est réduit à $\mathrm{Out}_k(A)$, c'est par exemple le cas si A est une algèbre de dimension finie dont tous les modules simples sont de dimension 1, comme les algèbres de chemins sur un carquois acyclique.
- Pour plus de détails : The Picard group of noncommutative rings, in particular of orders. A. Fröhlich, Transactions of the American Mathematical Society Volume 180, June 1973.

2. Catégories additives

Exercice 3 - Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie et $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$.

(1) Un égalisateur de $(f, 0)$ est appelé un noyau de f. Ecrire la propriété universelle du noyau de f.

(2) Même question pour le conoyau de f qui est un co-égalisateur de $(f, 0)$.

(3) Décrire les noyaux et conoyaux dans les catégories de modules sur un anneau.

(4) On suppose de plus que $\mathcal{C}$ possède un objet zero. Montrer que f est un monomorphisme si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cong 0$. Dualement, montrer que f est un épimorphisme si et seulement si $\mathrm{Coker}(f) \cong 0$.

Exercice 4 - Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ trois petites catégories et $F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ un foncteur. Montrer que la composition par F induit un foncteur la catégorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ vers la catégorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}$.

Exercice 5 - * Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. Soient $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. En utilisant les propriétés universelles des produits et coproduits construire un morphism $\Delta_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X \oplus X)$, un morphisme $f \oplus g : \mathrm{Hom}(X \oplus X, Y \oplus Y)$ et un morphisme $\nabla_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \oplus Y, Y)$ tels que $f + g = \nabla_Y \circ (f \oplus g) \circ \Delta_X$.

Exercice 6 - * Soit $\mathcal{C}$ une catégorie preadditive. Montrer qu'il existe une catégorie additive $\mathrm{Add}(\mathcal{C})$ telle que :

(1) Il existe un foncteur additif pleinement fidèle $J : \mathcal{C} \to \mathrm{Add}(\mathcal{C})$.

(2) Si $\mathcal{D}$ est une catégorie additive et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur linéaire, alors il existe un unique foncteur additif $\overline{F} : \mathrm{Add}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$ tel que $\overline{F} \circ J = F$.

La propriété universelle entraine qu'une telle catégorie sera unique à équivalence de catégorie près. On l'appelle *l'additivisation* de $\mathcal{C}$. Indication : on peut chercher une catégorie dont les objets sont les suites finies d'objets de $\mathcal{C}$. Moralement la suite $(X_1, \cdots, X_n)$ représente la somme directe des X_is.

3. Catégories de complexes de chaines

Exercice 7 - On travaille dans la catégorie des complexes de chaines de A-modules pour un anneau A. On dit qu'un complexe de chaines $(C_\bullet, d)$ est scindé s'il existe une famille d'applications $s_n : C_n \to C_{n+1}$ telle que $d_{n+1} = d_{n+1} s_n d_{n+1}$.

(1) On suppose que le complexe $C_\bullet$ est scindé. Montrer que $C_\bullet$ est exact si et seulement si il est contractile (i.e. l'application identité $C_\bullet \to C_\bullet$ est homotope à l'application nulle).

(2) Donner un exemple d'un complexe de chaines exact qui n'est pas contractile.

(3) Considérons une suite exacte de R-modules libres $C_\bullet : \cdots \to C_n \to \cdots \to C_0 \to 0$. Montrer que $C_\bullet$ est scindée.

(4) Trouver un exemple de suite exacte (non bornée) de R-modules libres qui n'est pas scindée.

Exercice 8 - * Soit $f : C \to D$ un morphisme de complexes de chaines.
On note $C[1]$ le complexe défini par $C[1]_n = C_{n-1}$, $d = -d^C$.
On pose $\mathrm{Cone(f)_n} = \mathrm{C_{n-1}} \oplus \mathrm{D_n}$ et $d : \mathrm{Cone(f)_n} \to \mathrm{Cone(f)_{n-1}}$ définie par

$$d(x, y) = (-d^C x, d^D y + f(x))$$

(1) Montrer que Cone(f) est un complexe et que $0 \to D \to \mathrm{Cone(f)} \to \mathrm{C[1]} \to 0$ est une suite exacte courte de complexes.

(2) En déduire que f est un quasi-isomorphisme si et seulement si Cone(f) est exact.

(3) Montrer que si f est une équivalence d'homotopie alors Cone(f) est contractile.

(4) En déduire que $\mathrm{Cone(id_C)}$ est scindé et exact. On le note Cone(C). On note également $j : C \to \mathrm{Cone(C)}$ l'application canonique.

(5) Montrer que f est homotopiquement nulle si et seulement si il existe $s : \mathrm{Cone(C)} \to \mathrm{D}$ telle que $f = sj$.

Exercice 9 - *

Soit A un anneau et $Ch_+(A)$ la catégorie des complexes de chaines de A-modules concentrés en degrés positifs. Montrer qu'un complex $C_\bullet$ est isomorphe à 0 dans la catégorie homotopique $K_+(A)$ si et seulement si $C_\bullet$ est isomorphe à une somme directe de complexes de la forme $0 \to Z \xrightarrow{id} Z \to 0$ concentrés en deux degrés.