# COMPLEXES DE CHAINES ET HOMOLOGIE

Les questions et exercices $*$ peuvent être ignorées.

## 1. Catégories abéliennes

**Exercice 1 -** * Une catégorie additive est dite *préabélienne* si tout morphisme a un noyau et un conoyau. Montrer qu'une catégorie préabelienne est abélienne si et seulement si tout monomorphisme est un noyau et tout épimorphisme est un conoyau.

**Exercice 2 - Examen seconde session 2022** Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Montrer que la catégorie des foncteurs

$$Fun(\mathcal{C}, \mathcal{A})$$

est abélienne.

## 2. Complexes de (co)chaines

**Exercice 3 -** Soit $k$ un anneau commutatif unitaire et $A$ une $k$-algèbre. On rappelle que pour nous, une $k$-algèbre est un anneau associatif (non nécessairement commutatif) unitaire avec un homomorphisme $k \to Z(A)$. Soit $M$ un $A$-$A$-bimodule.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $CH_n(A, M) := M \otimes_A A^{\otimes_k n}$ et $CH_0(A, M) := M$. Pour $i \in [n]$, on pose

$$d_i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} m \cdot a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots a_n \text{ si } i = 0, \\ m \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \text{ si } 0 < i < n, \\ a_n \cdot m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \text{ si } i = n. \end{cases}$$

Vérifier que l'application $d_n : CH_n(A, M) \to CH_{n-1}(A, M)$ définie par $\delta_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ fait de $(CH_\bullet(A, M), \delta)$ un complexe de chaînes de $k$-modules. On l'appelle complexe de chaînes de *Hochschild* de $A$ à coefficients dans $M$. On note par $HH_n(A, M)$ le $n$-ième groupe d'homologie de ce complexe.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $CH^n(A, M) := \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)$ et $CH^0(A, M) = M$. Pour $i \in [n]$, on pose $\delta^i : \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \to \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, M)$ l'application définie par

$$d^i(f)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \text{ si } i = 0, \\ f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \text{ si } 0 < i < n, \\ f(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) a_n \text{ si } i = n. \end{cases}$$

Vérifier que l'application $\delta^n : CH^n(A, M) \to CH^{n+1}(A, M)$ définie par $\delta_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d^i$ fait de $(CH^\bullet(A, M), d)$ un complexe de cochaînes de $k$-modules. On l'appelle complexe de cochaînes de *Hochschild* de $A$ à coefficients dans $M$. On note par $HH^n(A, M)$ le $n$-ième groupe de cohomologie de ce complexe.

(3) Calculer $HH_0(A, M)$ et $HH^0(A, M)$. On peut supposer $M = A$ pour simplifier si l'on souhaite.

(4) Une dérivation de $A$ est une application $d : A \to A$ $k$-linéaire telle que $d(ab) = d(a)b + ad(b)$. Une dérivation $d$ est intérieure s'il existe $m \in A$ tel que $d(a) = am - ma$ pour tout $a$. On note $Der(A)$ l'ensemble des dérivations de $A$ et $IDer(A)$ l'ensemble des dérivations intérieures de $A$. Montrer que $HH^1(A, A) = Der(A)/IDer(A)$.

(5) *** Qu'est ce que $HH_1(A, A)$ ? Lorsque $A$ est commutative $HH_1(A)$ est donné par $\Omega^1_{A|k}$ qui est un objet universel représentant le foncteur dérivation $Der(A, -)$, appelé le module des différentielles de Kähler.

(6) *On pose $B_n(A) = A^{\otimes_k n+2}$ et pour $i \in [n]$, on pose $d_i$ l'application $B_n(A) \to B_{n-1}(A)$ définie par $d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_0 \otimes ... \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$. Vérifier que ceci permet de munir $(B_n(A))_n$ d'une structure de complexe de chaînes. On l'appelle la résolution *barre* de $A$.

(7) * Voyez-vous le lien avec le complexe $CH_\bullet(A, M)$ ?

(8) * On considère le complexe augmenté $(\widetilde{B}_n(A), d)$ où $\widetilde{B}_{-1}(A) = A$, $\widetilde{B}_n(A) = B_n(A)$ si $n \in \mathbb{N}$ et $\widetilde{B}_n(A) = 0$ sinon. On pose $d_0 : A \otimes A \to A$ l'application induite par $d_0(a \otimes b) = ab$. Vérifier que $(\widetilde{B}_n(A), d)$ est un complexe de chaînes homotopique au complexe nul.

## 3. Projectifs et injectifs

**Exercice 4 -**

(1) Montrer que tout facteur direct d'un module projectif est projectif.

(2) Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est projectif et non libre en tant que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-module. Généraliser.

(3) Montrer qu'un coproduit de modules projectifs est un module projectif.

(4) Montrer que toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$ avec $C$ projectif est scindée.

(5) Si $A$ est un anneau principal (PID), montrer qu'un module de type fini est projectif si et seulement s'il est libre. On pourra se ramener à la démonstration qu'un sous-module d'un module libre de rang $n$ est libre de rang au plus $n$.

(6) * Si $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local, alors tout module projectif de type fini est libre.

(7) Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné fini et $k$ un corps. On voit $X$ comme une catégorie et on pose $\mathrm{Rep}_k(X) = \mathrm{Fun}(X, k\,\mathrm{Mod})$. Montrer que les foncteurs 'représentables' $h_x = k[\mathrm{Hom}_X(x, -)]$ sont projectifs. Que se passe-t-il si on remplace $(X, \leq)$ par un groupe et que l'on regarde les foncteurs sur la catégorie du groupe ?

**Exercice 5 -** * Soient $G$ un groupe fini et $k$ un corps. Démontrer que toute suite exacte courte de $kG$-modules de dimension finie est scindée si et seulement si la caractéristique de $k$ ne divise pas l'ordre de $G$.

**Exercice 6 - Critère de Baer**

Soit $M$ un $R$-module.

(1) ** Montrer que $M$ est injectif si et seulement si pour tout idéal $I$ de $R$, tout morphisme $I \longrightarrow M$ s'étend en un morphisme $R \longrightarrow M$ . (Hint : Zorn's Lemma)

(2) En déduire que si de plus $R$ est principal, alors $M$ est injectif si et seulement si $M$ est *divisible* (c'est-à-dire pour tout $a \in R \setminus \{0\}$ la multiplication $M \xrightarrow{\times a} M$ est surjective).

(3) Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont des groupes abéliens injectifs.

**Exercice 7 - Bockstein** Soit $n$ un entier ; on considère la suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z} \overset{\times n}{\to} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$. Soit $C$ un complexe de chaine tel que $C_k$ est un groupe abélien libre pour tout $k$.

(1) Justifier qu'il existe une suite exacte longue

$$\ldots \to H_k(C) \to H_k(C) \overset{\rho_k}{\to} H_k(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \overset{\overline{\beta_k}}{\to} H_{k-1}(C) \to \ldots$$

(2) On note $\beta_k$ la composée

$$H_k(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \overset{\overline{\beta_k}}{\to} H_{k-1}(C) \overset{\rho_{k-1}}{\to} H_{k-1}(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Montrer que $\beta_k \beta_{k+1} = 0$

(3) On suppose que $n = p$ est un nombre premier et que pour tout $k$ le groupe $H_k(C)$ est un groupe de $p$-torsion. Montrer que l'homologie du complexe $(H_*(C \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \beta)$ est nulle.