COMPLEXES DE CHAINES ET HOMOLOGIE

Exercice 1 - Examen seconde session 2022 Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Montrer que la catégorie des foncteurs

$$Fun(\mathcal{C}, \mathcal{A})$$

est abélienne.

1. Complexes de (co)chaines

Exercice 2 - Soit k un anneau commutatif unitaire et A une k-algèbre. On rappelle que pour nous, une k-algèbre est un anneau associatif (non nécessairement commutatif) unitaire avec un homomorphisme $k \to Z(A)$. Soit M un A-A-bimodule.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $CH_n(A, M) := M \otimes_k A^{\otimes_k n}$ et $CH_0(A, M) := M$. Pour $i \in [n]$, on pose

$$d_i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} m \cdot a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots a_n \text{ si } i = 0, \\ m \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \text{ si } 0 < i < n, \\ a_n \cdot m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \text{ si } i = n. \end{cases}$$

Vérifier que l'application $d_n : CH_n(A, M) \to CH_{n-1}(A, M)$ définie par $\delta_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$ fait de $(CH_\bullet(A, M), \delta)$ un complexe de chaînes de k-modules. On l'appelle complexe de chaînes de *Hochschild* de A à coefficients dans M. On note par $HH_n(A, M)$ le n-ième groupe d'homologie de ce complexe.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $CH^n(A, M) := \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)$ et $CH^0(A, M) = M$. Pour $i \in [n]$, on pose $\delta^i : \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \to \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, M)$ l'application définie par

$$d^i(f)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \text{ si } i = 0, \\ f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} a_i \otimes \cdots \otimes a_n) \text{ si } 0 < i \leq n, \\ f(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) a_n \text{ si } i = n + 1. \end{cases}$$

Vérifier que l'application $\delta^n : CH^n(A, M) \to CH^{n+1}(A, M)$ définie par $\delta_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d^i$ fait de $(CH^\bullet(A, M), d)$ un complexe de cochaînes de k-modules. On l'appelle complexe de cochaînes de *Hochschild* de A à coefficients dans M. On note par $HH^n(A, M)$ le n-ième groupe de cohomologie de ce complexe.

(3) Calculer $HH_0(A, M)$ et $HH^0(A, M)$. On peut supposer $M = A$ pour simplifier si l'on souhaite.

(4) Une dérivation de A est une application $d : A \to A$ k-linéaire telle que $d(ab) = d(a)b + ad(b)$. Une dérivation d est intérieure s'il existe $m \in A$ tel que $d(a) = am - ma$ pour tout a. On note $Der(A)$ l'ensemble des dérivations de A et $IDer(A)$ l'ensemble des dérivations intérieures de A. Montrer que $HH^1(A, A) = Der(A)/IDer(A)$.

(5) *** Qu'est ce que $HH_1(A, A)$? Lorsque A est commutative $HH_1(A)$ est donné par $\Omega^1_{A|k}$ qui est un objet universel représentant le foncteur dérivation $Der(A, -)$, appelé le module des différentielles de Kähler.

(6) *On pose $B_n(A) = A^{\otimes_k n+2}$ et pour $i \in [n]$, on pose d_i l'application $B_n(A) \to B_{n-1}(A)$ définie par $d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_0 \otimes ... \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$. Vérifier que ceci permet de munir $(B_n(A))_n$ d'une structure de complexe de chaînes. On l'appelle la résolution *barre* de A.

(7) * Voyez-vous le lien avec le complexe $CH_\bullet(A, M)$?

(8) * On considère le complexe augmenté $(\widetilde{B}_n(A), d)$ où $\widetilde{B}_{-1}(A) = A$, $\widetilde{B}_n(A) = B_n(A)$ si $n \in \mathbb{N}$ et $\widetilde{B}_n(A) = 0$ sinon. On pose $d_0 : A \otimes A \to A$ l'application induite par $d_0(a \otimes b) = ab$. Vérifier que $(\widetilde{B}_n(A), d)$ est un complexe de chaînes homotopique au complexe nul.

Exercice 3 - Homologie des ensembles ordonnés, Exam 2023

Soit $(P, \leq)$ un ensemble (partiellement) ordonné. On appelle m-chaine de P un sous-ensemble totalement ordonné de P contenant exactement $m + 1$ éléments. Les 0-chaines correspondent donc aux éléments de P, et les 1-chaines sont les couples (x, y) avec $x \leq y \in P$ et $x \neq y$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n(P)$ le groupe abélien libre sur l'ensemble des n-chaines de P. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n : C_n(P) \to C_{n-1}(P)$ l'application définie sur une n-chaine $(x_0 < \cdots < x_n)$ par

$$d_n(x_0 < \cdots < x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_0 < \cdots < \widehat{x_i} < \cdots x_n),$$

où $(x_0 < \cdots < \widehat{x_i} < \cdots x_n)$ est la $(n-1)$-chaine obtenue en retirant x_i.

(1) Montrer que $C(P)_\bullet = (C_n(P), d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un complexe de chaines de groupes abéliens. Son homologie s'appelle l'homologie de l'ensemble ordonné P.

(2) On considère $\epsilon : C_0(P) \to \mathbb{Z}$ l'application définie sur une 0-chaine $x \in P$ par $\epsilon(x) = 1$. Justifier que l'on peut augmenter le complexe $C_\bullet(P)$ en posant $C_{-1} = \mathbb{Z}$ et $d_0 = \epsilon$. On note alors $\widetilde{C}_\bullet$ ce complexe.

(3) Pour $x, y \in P$, on dit que x et y sont *comparables* si $x \leq y$ ou $y \leq x$. On dit que P est *connexe* si pour tout $x, y \in P$, il existe $x_0, x_1, \cdots, x_s \in P$ avec $x_0 = x$, $x_s = y$ et x_i, x_{i+1} sont comparables pour tout $i \in \{0, \cdots, s-1\}$. Décrire l'homologie de degré 0 de P, lorsque P est connexe. Quelle est l'homologie $H_0(P)$ lorsque P n'est pas connexe ? (pour cette seconde partie, on ne demande pas une démonstration détaillée).

(4) On considère l'ensemble $X = \{1, 2, 3\}$ et $P = (\mathcal{P}(X), \subset)$ l'ensemble des parties de X ordonnées par inclusion. On considère $\overline{P} = P \setminus \{\emptyset, X\}$ ordonné par inclusion. Calculer l'homologie de $\overline{P}$.

(5) On suppose P possède un plus petit élément 0 (i-e tel que $0 \leq x\ \forall x \in P$). Montrer que $\widetilde{C}_\bullet$ est contractile. En déduire l'homologie de P.

Correction

(1) This is clear.

(2) This is also clear since $d_1(x, y) = y - x \in \ker(\epsilon)$.

(3) Let $x \in P$ be a fixed element. For $y \in P$ y not equal to x, there is a sequence $x_0 = x, x_1, \cdots, x_s = y$ with x_i comparable to x_{i+1}. So, the chain (x_i, x_{i+1}) or the chain (x_{i+1}, x_i) is in P and not both. We let $w_i = (x_i, x_{i+1})$ in the first case, and $w_i = -(x_{i+1}, x_i)$ in the second case. In any case we have $d_1(w_i) = x_{i+1} - x_i$. Let $w_y = \sum_{i=0}^{s-1} w_i$. We have, $d_1(w_y) = -x_0 + x_1 - x_1 + \cdots - x_{s-1} + x_s = -x + y$. Hence $[x] = [y]$ in $\mathbb{Z}[P]/Im(d_1)$. Moreover $\epsilon(x) \neq 0$, hence $[x] \neq 0$. In other words, we have $H_0(P) \cong \mathbb{Z}$.

The transitive closure of 'being comparable' is an equivalence relation and the equivalence classes are called the connected components of P. Hence, if P is not connected, it is a disjoint union of connected components. Moreover, if $P = \sqcup_\alpha P_\alpha$, it is clear that $C_\bullet(P) \cong \bigoplus_\alpha C_\bullet(P_\alpha)$. It follows that $H_0(P)$ is the free abelian group with rank the number of connected components of P.

(4) The poset looks like :

$$\begin{tikzcd}
12 & 13 & 23 \\
1 \arrow[u] \arrow[ur] & 2 \arrow[ul] \arrow[ur] & 3 \arrow[ul] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

There are 6 elements in P and there are 6 1-chains. There are no larger chains, so the complex $C_\bullet(P)$ is concentrated in degrees 0 and 1. The poset is connected hence the homology in degree 0 is $\mathbb{Z}$. The kernel of d_1 is a submodule of a finitely generated free $\mathbb{Z}$-module, hence it is a free. Since, the map d_1 has rank 5, we see that the kernel is $\mathbb{Z}$. Hence P has homology $\mathbb{Z}$ in degree 0 and 1 and all the other homology groups are zero. Of course one can also compute the matrix of d_1 and check the details.

(5) Let $s_{-1} : \mathbb{Z} \to C_0(P)$ be the map defined by $s_{-1}(1) = 0$. We have $\epsilon \circ s_{-1}(1) = \epsilon(0) = 1$. For $n \geq 0$, let $s_n : C_n(P) \to C_{n+1}(P)$ be the map defined on an n-chain by

$$s_n(x_0, \cdots, x_n) = \begin{cases} (0, x_0, \cdots, x_n) & \text{if } x_0 \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We have to check that $Id_{C_n(P)} = s_{n-1}d_n + d_{n+1}s_n$. There is a special case when $n = 0$: if $x = 0$, then $s_0(x) = 0$, hence $(sd + ds)(x) = s_{-1}(1) = 0$. If $x \neq 0$, we have $sd + ds(x) = d_1(0, x) + s_{-1}(1) = x - 0 + \hat{0} = x$. The general case is similar. If $(x_0, \cdots, x_n)$ is an n-chain with $x_0 = 0$, then it is killed by s_n and the factor of $d_n(x_0, \cdots, x_n)$ which is not killed by s_{n-1} is the one obtained by removing x_0. Hence we have $s_{n-1}d_n(0, x_1, \cdots, x_n) = s_{n-1}(x_1, \cdots, x_n) = (0, x_1, \cdots, x_n)$. When $x_0 \neq 0$, then we have :

$$\begin{aligned} d_{n+1}s_n(x_0, \cdots, x_n) &= d_{n+1}(0, x_0, \cdots, x_n) \\ &= (x_0, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (0, x_0, \cdots, \widehat{x_{i-1}}, \cdots, x_n) \\ &= (x_0, \cdots, x_n) - s_{n-1}d_n(x_0, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

The result follows. Hence the homology of the augmented complex is zero and the homology of P is $\mathbb{Z}$ in degree 0 and 0 in other degrees.

2. Projectifs et injectifs

Exercice 4 -

(1) Montrer que tout facteur direct d'un module projectif est projectif.
(2) Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est projectif et non libre en tant que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-module. Généraliser.
(3) Montrer qu'un coproduit de modules projectifs est un module projectif.
(4) Montrer que toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$ avec C projectif est scindée.
(5) Si A est un anneau principal (PID), montrer qu'un module de type fini est projectif si et seulement s'il est libre. On pourra se ramener à la démonstration qu'un sous-module d'un module libre de rang n est libre de rang au plus n.
(6) * Si $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local, alors tout module projectif de type fini est libre.
(7) Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné fini et k un corps. On voit X comme une catégorie et on pose $\mathrm{Rep}_k(X) = \mathrm{Fun}(X, k\,\mathrm{Mod})$. Montrer que les foncteurs 'représentables' $h_x = k[\mathrm{Hom}_X(x, -)]$ sont projectifs. Que se passe-t-il si on remplace $(X, \leq)$ par un groupe et que l'on regarde les foncteurs sur la catégorie du groupe ?

Correction

(1) (1)-(4) have been proved in class.
(5) If P is a finitely generated projective module, let $x_1, \cdots, x_n$ be a generating set. Set $f_i : A \to P$ the map sending 1 to x_1. Then $(f_1, \cdots, f_n) : A^n \to P$ is a surjective map. Since P is projective it splits and we see that P is a submodule of a finitely generated free module. It remains to prove that a submodule of a free module of rank n is free. We start with $n = 1$. A submodule is an ideal and since the ring is a PID, it is of the form Ax. This is a free module.

For the induction we consider N a submodule of A^n and we project onto A^{n-1}. Then we have a short exact sequence
$$0 \to Ker(\pi|_N) \to N \to \pi(N) \to 0.$$
The module $\pi(N)$ is a submodule of A^{n-1} hence it is free of rank at most $n-1$. Hence the short exact sequence splits and $N = \pi(N) \oplus Ker(\pi|_N)$. Now $Ker(\pi|_N) \subset Ker(\pi) = A$. Hence it is also free by induction.
(6) Consider this question only if you know local rings : sketch of proof let $A/m = k$ be the residue field. Let P be a finitely generated module. We choose a generating set $x_1, \cdots, x_n$ of P such that the image is a basis of the k-vector space P/mP. As for the previous question we have $A^n \cong P \oplus Q$ for a submodule Q of A^n. Going into the quotient we have $k^n \cong P/mP \oplus Q/mQ$. Since P/mP has dimension n we have $Q = mQ$. By Nakayama Lemma this implies $Q = 0$.
(7) We have h_x is the composition of the linearization functor and $Hom(x, -)$. Hence
$$\mathrm{Hom}_{Fun(X,k\,\mathrm{Mod})}(h_x, -) \cong \mathrm{Hom}_{Fun(X,Set)}(\mathrm{Hom}(x, -), U(-)) \cong ev_x \circ U(-)$$
where U is the forgetful functor from $k\,\mathrm{Mod}$ to Set and ev_x is the evaluation at x. This composition is clearly exact hence h_x is projective.

If we work with the category $B(G)$ the result is still true however this gives only one projective object which is far from being indecomposable. For a poset, the h_x are indecomposable since $\mathrm{End}(h_x) = h_x(x) = k$ hence there is no non-trivial idempotents in $\mathrm{End}(h_x)$.

Exercice 5 - * Soient G un groupe fini et k un corps. Démontrer que toute suite exacte courte de kG-modules de dimension finie est scindée si et seulement si la caractéristique de k ne divise pas l'ordre de G. **Correction** This is the classical Maschke theorem. The idea is simple we can always find a splitting π for a short exact sequence of vector spaces. However it is not a morphism of kG-modules. When G is finite and the characteristic of the field does not divide the order of G you can normalize π :
$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi \cdot g^{-1},$$
to obtain a morphism of kG-modules.

If the characteristic divides the ordre of G, one can prove that the trivial module is not projective : indeed there is an augmentation map $\epsilon : kG \to k$ sending $\sum \lambda_g g$ to $\sum \lambda_g$. If this map splits, there is a splitting $s : k \to kG$ sending 1 so $\sum_g w_g g$. Since $g \cdot 1 = 1$ the element $s(1)$ is a G-invariant. I-e $s(1) = c \sum_{g \in G} g$. Now $\epsilon(s(1)) = c|G| = 0$, giving a contradiction.

Exercice 6 - Critère de Baer

Soit M un R-module.

(1) ** Montrer que M est injectif si et seulement si pour tout idéal I de R, tout morphisme $I \longrightarrow M$ s'étend en un morphisme $R \longrightarrow M$. (Hint : Zorn's Lemma)

(2) En déduire que si de plus R est principal, alors M est injectif si et seulement si M est *divisible* (c'est-à-dire pour tout $a \in R \setminus \{0\}$ la multiplication $M \xrightarrow{\times a} M$ est surjective).

(3) Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont des groupes abéliens injectifs.

Correction

(1) You can find the proof of Baer criterion in every book... Here are the arguments. We assume that we have a module J such that any morphism from an ideal of A to J lifts as a morphism from A to J. We whish to prove that J is injective hence we consider

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & N \\ & J, & \end{tikzcd}$$

where M is a submodule of N. Consider the set $S = \{(M', \phi') | M \subseteq M' \subseteq N \text{ and } \phi'|_M = \phi\}$. This is a poset for the relation $(M', \phi') \leq (M", \phi")$ if $M' \subseteq M"$ and $\phi"|_{M'} = \phi'$. It is non-empty and every chain (M_i, ϕ_i) has a supremum given by $(\bigcup_i M_i, \psi)$ where $\psi(m) = \phi_i(m)$ if $m \in M_i$. By Zorn Lemma there is a maximal pair (M', ϕ') in S. If $M' = N$ we are done, otherwise let us find a contradiction.

Let $x \in N \setminus M'$ and consider $I = \{a \in A \mid ax \in M'\}$. It is easy to see that I is an ideal of A. Moreover sending $a \in I$ to $\phi'(ax)$ gives a morphism of A-modules from I to J. By assumption, it lifts as a morphism f of A-modules from A to J. Now consider $M'' = M' + Ax$. It is a submodule of N and it strictly contains M'. We set $\psi M'' \to J$ the map defined by $\psi(m + ax) = \phi'(m) + f(a)$. It is a well-defined morphism of A-module which lifts ϕ'. Hence we contradict the maximality of the pair.

(2) A module M is divisible if and only if any map from a principal ideal (a) to M lifts as a map from R to M :

$$\begin{tikzcd} (a) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & R \arrow[dl, "\psi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

If there is such a lift, then $\phi(a) = \psi(a) = \psi(a \cdot 1) = a\psi(1)$. For $m \in M$ we consider the map $\phi_m : (a) \to M$ defined by $\phi_m(a) = m$. Then we get $m = a \cdot \psi(1)$. That is for every $m \in M$, there is $n = \psi(1)$ such that $m = an$. So multiplication by a is surjective.

Conversely if the multiplication by a is surjective for $m \in M$ there is $n \in M$ such that $an = m$. We set ψ the map defined by $\psi(1) = n$. This is a lift for the map $(a) \to M$ defined by $\phi(a) = m$. Since every map from (a) to M is of this form we have that M is injective by Bear criterion.

Of course if we remove the hypothesis on the ring there are divisible modules that are not injective. For example $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Z}[x]$ is a divisible $\mathbb{Z}[x]$-module but it is not injective. Look at $(2, x)$ and g defined by $g(2) = 0$ and $g(x) = 1/2$.

(3) They are divisible.

Exercice 7 - Algèbres de dimension finie, Exam 2023 Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps k. On admet que les A-modules de type fini sont exactement les A-modules de dimension finie sur le corps k. On note $\operatorname{mod} A$ la catégorie des A-modules (à droite) de type fini.

(1) Justifier que la catégorie $\operatorname{mod} A$ est abélienne.

(2) Démontrer que la catégorie $\operatorname{mod} A$ possède assez de projectifs.

(3) Démontrer que $\operatorname{mod} A$ possède assez d'injectifs. Indication, on pourra utiliser le foncteur $D = \operatorname{Hom}_k(-, k)$.

Correction

(1) The key is that $\operatorname{mod} A$ is a full subcategory of $\operatorname{Mod} A$. Since $\operatorname{Mod} A$ is abelian, it follows that $\operatorname{mod} A$ is an preadditive category. The coproduct (in $\operatorname{Mod} A$) of two finite dimensional modules is finite dimensional, hence it is in $\operatorname{mod} A$. Now, if $f : M \to N$ is a morphism between finite dimensional modules, then its kernel and cokernel (in $\operatorname{Mod} A$) are also finite dimensional. Since $\operatorname{Hom}_{\operatorname{mod} A}(M, N) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Mod} A}(M, N)$, it is clear that the kernel of f is a kernel in $\operatorname{mod} A$. Hence, $\operatorname{mod} A$ is a preabelian category. It remains to look at the canonical morphism from the coimage to the image. Since this is exactly the same morphism as in $\operatorname{Mod} A$, it is an isomorphism.

(2) Let X be an A-module generated by $x_1, \cdots, x_n$. Let $\phi_i : A \to X$ the morphism defined by $\phi_i(1) = x_i$. Then $f : A^n \to X$ the map defined by $f(a_i) = \sum_{i=1}^n \phi_i(a_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ is an epimorphism. Hence, $\operatorname{mod} A$ has enough projectives.

(3) Using the right A-module structure on M, we see that $D = \mathrm{Hom}_k(M,k)$ is an A-module on the left. Concretely for $\phi \in D(M)$, and $a \in A$, the map $a \cdot \phi$ sends m to $\phi(ma)$. Hence D is a functor from $\mathrm{mod}\, A$ to $A\,\mathrm{mod}$. Similarly, if we start with a left A-module, $D(M)$ is a right A-module. Moreover $D^2 \cong Id$, hence D is a contravariant equivalence from $\mathrm{mod}\, A$ to $A\,\mathrm{mod}$. In other words, an equivalence from $(\mathrm{mod}\, A)^{op}$ to $A\,\mathrm{mod}$. As an equivalence between abelian categories it sends projective object to projective object and epimorphism to epimorphism. By Question 2, $\mathrm{mod}\, A$ has enough projectives. So if $M \in \mathrm{mod}\, A$, then there is a projective module P in $A\,\mathrm{mod}$ and an epimorphism $\pi : P \to D(M)$. Applying D we have in $(\mathrm{mod}\, A)^{op}$ an epimorphism $D(\pi) : D(P) \to DDM \cong M$. So in $\mathrm{mod}\, A$, we have a monomorphism $M \to D(P)$. Moreover $D(P)$ is projective in $(\mathrm{mod}\, A)^{op}$, hence it is injective in $\mathrm{mod}\, A$.

Exercice 8 - Bockstein Soit n un entier ; on considère la suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$. Soit C un complexe de chaine tel que C_k est un groupe abélien libre pour tout k.

(1) Justifier qu'il existe une suite exacte longue

$$\ldots \to H_k(C) \to H_k(C) \xrightarrow{\rho_k} H_k(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\overline{\beta_k}} H_{k-1}(C) \to \ldots$$

(2) On note β_k la composée

$$H_k(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\overline{\beta_k}} H_{k-1}(C) \xrightarrow{\rho_{k-1}} H_{k-1}(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Montrer que $\beta_k \beta_{k+1} = 0$

(3) On suppose que $n = p$ est un nombre premier et que pour tout k le groupe $H_k(C)$ est un groupe de p-torsion. Montrer que l'homologie du complexe $(H_*(C \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \beta)$ est nulle.

Correction

(1) By assumption $C_i \otimes -$ is exact. This induces a short exact sequences of complexes then take long exact sequence in homology.

(2) This is clear since when composing two successive β we compose $\overline{\beta}_k \circ p_k$ which is zero.

(3) The hypothesis implies that the multiplication by n on $H_k(C)$ is zero. Hence p_k is injective and β_k is surjective. If $x \in \ker(\beta_k)$ we have $x \in \ker(\overline{\beta}_k)$. By exactness of the long exact sequence, this is in the image of p_k. Since β_{k+1} is surjective we see that x is in the image of β_{k+1}.