CATÉGORIES, ÉQUIVALENCES, FONCTEURS ADJOINTS

Les exercices 1,4,5,6,7 et 10 sont à travailler en priorité. Les exercices avec $\star$ sont plus difficiles, plus exotiques ou en dehors du programme et peuvent être ignorés en première lecture.

1. Catégories et équivalences

Exercice 1 -

(1) Quels sont les monomorphismes, les épimorphismes et les isomorphismes dans la catégorie des ensembles ? Même question pour la catégorie des espaces topologiques.

(2) Quels sont les monomorphismes et les épimorphismes($\star$) dans la catégorie des groupes ?

(3) Montrer que l'inclusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un monomorphisme et un épimorphisme dans la catégorie des anneaux unitaires. Est-ce un isomorphisme ?

$\star$ Le foncteur qui oubli la structure multiplicative de la catégorie des anneaux unitaires vers celle des groupes abéliens est-il plein ? fidèle ? essentiellement surjectif ? Mêmes questions pour le foncteur qui envoie un anneau unitaire sur son groupe des unités et pour le foncteur qui oubli l'unité de la catégorie des anneaux unitaires vers celle des anneaux non unitaires. Ici on attend une réponse intuitive plutôt que très précise, car certaines questions sont difficiles.

Exercice 2 - $\star$ Un *groupoïde* est une catégorie dans laquelle tout morphisme est inversible.

(1) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Justifier qu'il existe un groupoïde qui est sous-catégorie de $\mathcal{C}$ ayant les mêmes objets. On l'appelle le *coeur* de $\mathcal{C}$.

(2) Si $(P, \leq)$ un préordre. Rappeler de quelle façon P peut se voir comme une catégorie et décrire son coeur.

(3) Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde. Vérifier que pour tout objet X de $\mathcal{G}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$ est un groupe.

(4) Soient X et Y sont deux objets de $\mathcal{G}$ tels que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ est non-vide. Montrer que $\mathrm{End}_{\mathcal{G}}(X)$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{G}}(Y)$ sont des groupes isomorphes. Si tous les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ sont non vides, on dira que le groupoïde est *connexe*.

(5) Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde connexe. Montrer que $\mathcal{G}$ est équivalent à la catégorie $\mathbf{B}G$ d'un groupe G. Construire une équivalence quasi-inverse.

(6) Soit M un espace topologique. On appelle $\pi(M)$ la catégorie dont les objets sont les éléments de M et les morphismes sont les classes d'homotopie des chemins. Justifier que $\pi(M)$ est un groupoïde.

(7) Justifier l'emploi du mot "connexe" ci-dessus. Si $x \in M$, qu'est-ce que le groupe $\mathrm{End}_{\pi(M)}(x)$?

Exercice 3 - Montrer que la catégorie des préordres finis est équivalente à la catégorie des espaces topologiques finis. Si $(X, \leq)$ est un préordre, on pourra utiliser les parties fermées vers le haut pour construire une topologie et inversement si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique on peut poser $x \leq y$ si x est dans la fermeture de $\{y\}$.

Exercice 4 - La catégorie des ensembles est-elle équivalente à sa catégorie opposée ? On pourra, par exemple utiliser le fait que l'ensemble vide possède la propriété suivante : si $f : X \to \varnothing$ est une application, alors f est un isomorphisme.

Exercice 5 - Donner un exemple de catégorie équivalente à sa catégorie opposée.

Exercice 6 - Centre d'une catégorie, Exam 2022.

Le centre $Z(\mathcal{C})$ d'une (petite) catégorie $\mathcal{C}$ est l'ensemble des endomorphismes naturels du foncteur $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Dans cet exercice, on ignore les éventuels problèmes ensemblistes.

(1) Montrer que la composition des transformations naturelles fait du centre de $Z(\mathcal{C})$ un monoïde commutatif.

(2) Soit G un groupe et $\mathbf{B}(G)$ la catégorie avec G comme endomorphismes d'un unique objet $\bullet$. Quel est le centre de $\mathbf{B}(G)$?

(3) Lorsque A est un anneau, démontrer que le centre de $\mathrm{Mod}\, A$ est isomorphe au centre de l'anneau A. On attend ici une réponse détaillée.

(4) Quel est le centre de la catégorie des ensembles ?

2. Catégories de modules

Exercice 7 - Lemme des cinq Considérons le diagramme commutatif de R-modules

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"'] & M_5 \arrow[d, "f_5"'] \\ N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5 \end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Montrer que :

(1) Si f_1 est surjective et f_2 et f_4 sont injectives alors f_3 est injective.

(2) Si f_5 est injective et f_2 et f_4 sont surjectives alors f_3 est surjective.

(3) En déduire que si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 aussi

Exercice 8 - Lemme du serpent

(1) Montrer qu'étant donné un carré commutatif de R-modules

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

on peut le compléter d'une seule manière en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ \ker\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \ker\beta \arrow[d] \\ A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\beta \arrow[d] \\ 0 & 0 \end{tikzcd}$$

(2) Soit un diagramme commutatif de R-modules

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & \\ 0 \longrightarrow & & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Montrer qu'il existe un morphisme $\delta : \ker\gamma \longrightarrow \operatorname{Coker}\alpha$ qui rend la suite

$$\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \longrightarrow \operatorname{Coker}\beta \longrightarrow \operatorname{Coker}\gamma$$

exacte.

(3) Montrer que si de plus $A \longrightarrow B$ est injective alors $\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta$ l'est aussi, et si $B' \longrightarrow C'$ est surjective alors $\operatorname{Coker}\beta \longrightarrow \operatorname{Coker}\gamma$ l'est aussi.

Exercice 9 - Suites scindées

(1) Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de R-modules. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) f admet une rétraction (i.e. il existe $B \xrightarrow{r} A$ tel que $rf = id_A$).

(b) g admet une section (i.e. il existe $C \xrightarrow{s} B$ tel que $gs = id_C$).

(c) f admet une rétraction r et g une section s telles que $fr + sg = id_B$.

(d) Il existe un isomorphisme $B \xrightarrow{h} A \oplus C$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "h", "\simeq"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"'] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Lorsque ces propositions sont satisfaites, la suite est dite *scindée*.

(2) Montrer que toute suite exacte courte d'espaces vectoriels est scindée.

(3) Montrer que la suite exacte courte de $\mathbb{Z}$-modules $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ n'est pas scindée.

(4) Déterminer toutes les suites exactes courtes de $\mathbb{Z}$-modules $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Sont-elles scindées ?

3. Foncteurs adjoints et limites

Exercice 10 -

(1) Soit R un anneau commutatif et M un R-module. Montrer que les foncteurs $- \otimes_R M$ et $\hom_R(M, -)$ de la catégorie des R-modules dans elle-même forment une paire adjointe. On donnera l'unité et la counité de l'adjonction.

(2) $\star$ Soit V un espace vectoriel. Montrer que le foncteur de la catégorie des espaces vectoriels dans elle-même donné par $W \mapsto W \otimes V$ a un adjoint à gauche et un adjoint à droite si et seulement si V est de dimension finie. Observer que ces adjoints sont canoniquement isomorphes dans ce cas. On pourra utiliser qu'un adjoint à droite preserve les limites, et on pourra montrer que $V^* \otimes_k - \cong \mathrm{Hom}(V, -)$ quand V est de dimension finie.

(3) Montrer que le foncteur évident de la catégorie des groupes abéliens dans la catégorie des groupes a un adjoint à gauche.

(4) Parmi vos constructions mathématiques favorites, trouvez en qui viennent d'un foncteur. Est-il représentable ? A-t-il des adjoints ?

Exercice 11 - Décrire, à l'aide de propriétés universelles, toutes les limites et colimites classiques du cours : (co)produit, co(égalisateur), produit fibré, somme amalgamée, etc...

Exercice 12 - $\star$

(1) Montrer que la catégorie des ensembles est complète et cocomplète.

(2) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et J une petite catégorie. On suppose que $\mathcal{C}$ admet des J-limites. Alors montrer que pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $F : J \to \mathcal{C}$, il y a un isomorphisme fonctoriel en X et en F :

$$\lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim F).$$

(3) Montrer que la catégorie des espaces topologiques est complète et cocomplète.

(4) Il est facile de construire des catégories qui ne sont ni complètes ni cocomplètes, donner quelques exemples. Qu'en est-il de la catégorie des corps ?