

PRODUITS TENSORIELS, CATÉGORIES ADDITIVES ET COMPLEXES DE CHAINES

Les questions et exercices * peuvent être ignorées.

1. PRODUIT TENSORIEL

Exercice 1 -

- (1) Montrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/\text{pgcd}(n, m)\mathbb{Z}$. Que se passe-t-il si m et n sont premiers entre eux?
- (2) Plus généralement, soient R un anneau unitaire (pas nécessairement commutatif) et I et J deux idéaux bilatères. Démontrer que $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I + J)$.
- (3) Démontrer que le produit tensoriel est associatif.

Exercice 2 - Groupe de Picard

- (1) Soit k un corps et n un entier. Démontrer que la catégorie des modules (à gauche) sur l'algèbre $M_n(k)$ est équivalente à la catégorie des k -espaces vectoriels. Indication, on pourra considérer $V = k^{n,1}$ les vecteurs colonnes de taille n dans k et $W = k^{1,n}$ les vecteurs lignes de taille n dans k et considérer les foncteurs $V \otimes_k -$ et $W \otimes_{M_n(k)} -$.
- (2) Soient A et B des k -algèbres telles que $A \text{ Mod}$ et $B \text{ Mod}$ sont équivalentes. Dédurre de la première question que A et B n'ont pas nécessairement des groupes d'automorphismes isomorphes. De même leurs groupes des unités ne sont pas nécessairement isomorphes.
- (3) Soit k un anneau commutatif et A une k -algèbre. Si X est un A - A -bimodule, on note par $[X]$ sa classe d'isomorphisme en tant que A - A -bimodule et on dit que X est *invertible* s'il existe un A - A -bimodule Y tel que $[X \otimes_A Y] = [Y \otimes_A X] = [A]$. Justifier que le produit tensoriel au dessus de A induit une structure de groupe sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de A -bimodules invertibles. On l'appelle le *groupe de Picard* de A et on le note $\text{Pic}(A)$.
- (4) Soit M un bimodule invertible. Démontrer que $\text{End}_A(M) \cong A^{\text{op}}$.
- (5) Soit $\alpha \in \text{Aut}_k(A)$. Justifier brièvement que l'application $- \cdot - \cdot - : A \times A \times A \rightarrow A$ définie par $a \cdot x \cdot b = ax\alpha(b)$ munit A d'une structure de A -bimodule. On note par ${}_1A_\alpha$ ce bimodule.
- (6) Démontrer que $\alpha \mapsto {}_1A_\alpha$ induit un homomorphisme Φ de groupes de $\text{Aut}_k(A)$ vers $\text{Pic}(A)$ dont le noyau est $\text{Inn}(A)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de A . On note $\text{Out}_k(A)$ le groupe $\text{Aut}_k(A)/\text{Inn}(A)$.
- (7) * Soient M et N deux bimodules invertibles. Démontrer que M et N sont isomorphes en tant que A -modules à gauche si et seulement s'il existe $\alpha \in \text{Aut}_k(A)$ tel que $M \cong N \otimes_A {}_1A_\alpha$ en tant que A -bimodules. (On pourra commencer par supposer que $N = A$, puis on s'y ramène en utilisant l'invertibilité de N).
- (8) * En déduire que l'image de Φ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de A - A -bimodules qui sont libres de rang 1 en tant que A -module à gauche.
- (9) *** On peut montrer que
 - $\text{Pic}(A)$ est invariant par équivalence de catégories : si A et B sont deux k -algèbres telles que $\text{Mod } A \cong \text{Mod } B$, alors $\text{Pic}(A) \cong \text{Pic}(B)$.
 - Il y a un homomorphisme de groupe Γ de $\text{Pic}(A)$ vers $\text{Aut}_k(Z(A))$. On note $\text{Picent}(A)$ le noyau de Γ . Si A est une algèbre commutative, alors $\text{Pic}(A) = \text{Picent}(A) \times \text{Aut}_k(A)$.
 - Dans certains cas le groupe de Picard de A est réduit à $\text{Out}_k(A)$, c'est par exemple le cas si A est une algèbre de dimension finie dont tous les modules simples sont de dimension 1, comme les algèbres de chemins sur un carquois acyclique.
 - Pour plus de détails : The Picard group of noncommutative rings, in particular of orders. A. Fröhlich, Transactions of the American Mathematical Society Volume 180, June 1973.

2. CATÉGORIES ADDITIVES

Exercice 3 -

Soit \mathcal{C} une category. On dit que \mathcal{C} a *des morphismes nuls* si pour chaque couple d'objet (X, Y) de \mathcal{C} il existe un morphisme $0_{X,Y} : X \rightarrow Y$ tel que

- (a) $f \circ 0_{X,Y} = 0_{X,Z}$ pour tout $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$.
- (b) $0_{X,Y} \circ g = 0_{W,Y}$ pour tout $g \in \mathcal{C}(W, X)$.

- (1) Justifier que la famille $(0_{X,Y})$ est unique si elle existe.

- (2) Supposons que \mathcal{C} possède un objet zero. Montrer qu'elle a des morphismes nuls.
- (3) Supposons que \mathcal{C} est k -linéaire. Montrer qu'elle a des morphismes nuls.
- (4) En déduire que dans une catégorie k -additive les éléments neutres des k -modules $\mathcal{C}(X, Y)$ ne dépendent pas du choix de l'enrichissement.

Exercice 4 - Soit \mathcal{C} une K -catégorie et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{C} .

- (1) Un égalisateur de $(f, 0)$ est appelé un noyau de f . Ecrire la propriété universelle du noyau de f .
- (2) Même question pour le conoyau de f qui est un co-égalisateur de $(f, 0)$.
- (3) Décrire les noyaux et conoyaux dans les catégories de modules sur un anneau.
- (4) On suppose de plus que \mathcal{C} possède un objet zero. Montrer que f est un monomorphisme si et seulement si $\text{Ker}(f) \cong \mathbb{0}$. Duallement, montrer que f est un épimorphisme si et seulement si $\text{Coker}(f) \cong \mathbb{0}$.

Exercice 5 - * Soit \mathcal{C} une catégorie additive. Soient $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. En utilisant les propriétés universelles des produits et coproduits construire un morphisme $\Delta_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X \oplus X)$, un morphisme $f \oplus g : \text{Hom}(X \oplus X, Y \oplus Y)$ et un morphisme $\nabla_Y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \oplus Y, Y)$ tels que $f + g = \nabla_Y \circ (f \oplus g) \circ \Delta_X$.

Exercice 6 - Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ trois petites catégories et $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ un foncteur. Montrer que la composition par F induit un foncteur la catégorie $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} vers la catégorie $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{E} .

Exercice 7 - * Soit \mathcal{C} une catégorie preadditive. Montrer qu'il existe une catégorie additive $\text{Add}(\mathcal{C})$ telle que :

- (1) Il existe un foncteur additif pleinement fidèle $J : \mathcal{C} \rightarrow \text{Add}(\mathcal{C})$.
- (2) Si \mathcal{D} est une catégorie additive et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur linéaire, alors il existe un unique foncteur additif $\bar{F} : \text{Add}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $\bar{F} \circ J = F$.

La propriété universelle entraîne qu'une telle catégorie sera unique à équivalences de catégorie près. On l'appelle l'*additivisation* de \mathcal{C} . Indication : on peut chercher une catégorie dont les objets sont les suites finies d'objets de \mathcal{C} . Moralement la suite (X_1, \dots, X_n) représente la somme directe des X_i s.

3. CATÉGORIES DE COMPLEXES DE CHAINES

Exercice 8 - On travaille dans la catégorie des complexes de chaînes de A -modules pour un anneau A . On dit qu'un complexe de chaînes (C_{\bullet}, d) est scindé s'il existe une famille d'applications $s_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$ telle que $d_{n+1} \circ s_n = d_n$.

- (1) Montrer que C_{\bullet} est exact et scindé si et seulement si il est contractile (i.e. l'application identité $C_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}$ est homotope à l'application nulle).
- (2) Donner un exemple d'un complexe de chaînes exact qui n'est pas contractile.
- (3) Considérons une suite exacte de R -modules libres $C_{\bullet} : \dots \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0$. Montrer que C_{\bullet} est scindée.
- (4) Trouver un exemple de suite exacte (non bornée) de R -modules libres qui n'est pas scindée.

Exercice 9 - * Soit $f : C \rightarrow D$ un morphisme de complexes de chaînes.

On note $C[1]$ le complexe défini par $C[1]_n = C_{n-1}$, $d = -d^C$.

On pose $\text{Cone}(f)_n = C_{n-1} \oplus D_n$ et $d : \text{Cone}(f)_n \rightarrow \text{Cone}(f)_{n-1}$ définie par

$$d(x, y) = (-d^C x, d^D y + f(x))$$

- (1) Montrer que $\text{Cone}(f)$ est un complexe et que $0 \rightarrow D \rightarrow \text{Cone}(f) \rightarrow C[1] \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de complexes.
- (2) En déduire que f est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\text{Cone}(f)$ est exact.
- (3) Montrer que si f est une équivalence d'homotopie alors $\text{Cone}(f)$ est contractile.
- (4) En déduire que $\text{Cone}(\text{id}_C)$ est scindé et exact. On le note $\text{Cone}(C)$. On note également $j : C \rightarrow \text{Cone}(C)$ l'application canonique.
- (5) Montrer que f est homotopiquement nulle si et seulement si il existe $s : \text{Cone}(C) \rightarrow D$ telle que $f = sj$.

Exercice 10 - *

Soit A un anneau et $Ch_+(A)$ la catégorie des complexes de chaînes de A -modules concentrés en degrés positifs. Montrer qu'un complexe C_{\bullet} est isomorphe à 0 dans la catégorie homotopique $K_+(A)$ si et seulement si C_{\bullet} est isomorphe à une somme directe de complexes de la forme $0 \rightarrow Z \xrightarrow{id} Z \rightarrow 0$ concentrés en deux degrés.