ALGÈBRES, COALGÈBRES ET BIALGÈBRES

Exercice 1 - Soit C un k-espace vectoriel avec une base $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $\Delta_B : C \to C \otimes_k C$ et $\epsilon_B : C \to k$ les applications définies par

$$\Delta_B(b_n) = \sum_{k=0}^{n} b_k \otimes b_{n-k},$$

et $\epsilon(b_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(1) Montrer que $(C, \Delta_B, \epsilon_B)$ est une coalgèbre. Est-elle cocommutative ?

(2) On pose $C = k[X]$ et $B = (X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de C. Décrire la coalgèbre que l'on obtient de identifiant $k[X] \otimes k[X]$ avec $k[X,Y]$.

(3) On suppose maintenant que k est de caractéristique 0 et on consider $B = (\frac{X^n}{n!})$. Décrire la coalgèbre obtenue.

(4) On munit maintenant C de sa structure d'algèbre usuelle. Est-ce que les coalgèbres des questions 2 et 3 sont des bialgèbres ?

(5) Sont-elles des algèbres de Hopf ?

Exercice 2 -

Soit k un corps et $0 \neq q \in k$. On pose $A = \frac{k<x,y>}{(yx - qxy)}$.

(1) Montrer que $\{x^i y^j \mid i, j \geq 0\}$ est une base de A.

(2) Montrer que A possède une structure de bialgèbre avec $\Delta(x) = x \otimes x$, $\Delta(y) = y \otimes 1 + x \otimes y$, $\epsilon(x) = 1$ et $\epsilon(y) = 0$.

(3) On fixe $q = -1$ et on considère $I = (x^2 - 1, y^2)$ l'idéal de A engendré par $x^2 - 1$ et y^2. Montrer que I est un biideal de A.

(4) En déduire que $B = \frac{k<x,y>}{(yx+xy, x^2-1, y^2)}$ est une bialgèbre.

(5) Quelle est sa dimension ? Est-elle commutative ? Est-elle cocommutative ?

(6) Montrer que B est une algèbre de Hopf.

(7) Soit H une algèbre de Hopf. On pose $G = \{g \in H \setminus \{0\} | \Delta(g) = g \otimes g\}$. Montrer que G est un groupe.

(8) En déduire que A n'est pas une algèbre de Hopf.