

ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
2. PRÄSENZBLATT

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1.

- (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ so dass $n \geq 2$. Sei $m \in [n! + 2, n! + n]$. Zeigen Sie, dass m keine Primzahl ist.
(b) Finden Sie alle Primzahlen p so dass $p^2 + 2$ keine Primzahl ist.

Aufgabe 2. Seien $a = 46848$, $b = 2379$, $c = 8633$ und $d = 4183$.

- (a) Schreiben Sie die Zahlen a , b , c und d als Produkt von Primzahlen.
(b) Berechnen Sie $\text{ggT}(a, b)$ und $\text{ggT}(c, d)$ mit Hilfe von (a).
(c) Berechnen Sie $\text{ggT}(a, b)$ und $\text{ggT}(c, d)$ mit dem Euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 3. Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ und $k, m, n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie:

- (a) $x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1})$.
(b) $x - y$ teilt $x^k - y^k$.
(c) Wenn $m \mid n$ gilt, dann gilt $x^m - y^m \mid x^n - y^n$.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Zeigen Sie: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}$ mit Betrands Postulat.