ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
4. PRÄSENZBLATT

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1.

(a) Zwei multiplikative Funktionen $f, g : \mathbb{N}_{>0}$ sind genau dann gleich, wenn
$$f(p^n) = g(p^n)$$
für alle Primzahlen p und für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt.

(b) Seien f eine multiplikative Funktion und $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(d)$. Zeigen Sie:
$$g(n) = \prod_{\substack{p|n \\ p\in\mathbb{P}}} (1 - f(p)).$$

Aufgabe 2. Sei $k \geqslant 1$. Seien u und E^k die multiplikative Funktionen definiert durch by $u(n) = 1$ und $E^k(n) = n^k$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Sei $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$. Zeigen Sie, dass $\sigma_k = E^k \star u$ gilt.
(b) Sei $\tau = \sigma_0$. Zeigen Sie, dass $u \star u = \tau$ gilt.
(c) Sei $\tau_3 = u \star u \star u$. Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für τ_3.

Aufgabe 3. Beweisen order wiederlegen Sie:

(a) $P_1(n) = \prod_{d|n} d$ ist eine multiplikative Funktion.
(b) $\gamma(n) = \prod_{\substack{p|n \\ p\in\mathbb{P}}} p$ ist eine multiplikative Funktion.
(c) $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\tau(d)$ ist eine multiplikative Funktion und $g(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
(d) $\tau(n)$ ist eine ungerade Zahl genau dann, wenn $n = m^2$ für ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt.
(e) $\sigma(n)$ ist eine ungerade Zahl genau dann, wenn $n = m^2$ für ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt.

Aufgabe 4. Eine multiplikative Funktion heißt stark multiplikativ, falls $f(p^\alpha) = f(p)$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_{>0}$.

(a) Welche Funktionen γ, σ_2 und τ sind stark multiplikativ?
(b) Sei g eine multiplikative Funktion. Zeigen Sie, dass $h(n) = \sum_{d|n} \mu^2(d)f(d)$ stark multiplikativ ist.