ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE TRAININGSZETTEL

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1.

(a) Lösen Sie die diophantische Gleichung:
$$6x + 9y = 5.$$
(b) Lösen Sie die diophantische Gleichung:
$$3x + 3y + 5z = 10.$$
(c) Lösen Sie die diophantische Gleichung:
$$x^5 - y^2 = 4.$$
(Hinweis: Betrachten Sie modulo 11.)

Aufgabe 2.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Symbole:
$$\left(\frac{2}{77}\right), \ \left(\frac{179}{389}\right), \ \left(\frac{20}{99}\right).$$
(b) Überprüfen Sie für die Jacobi-Symbole $\left(\frac{a}{m}\right)$ in (a), ob a ein quadratischer Rest modulo m ist.

Aufgabe 3. [AG1 Übungsblatt 6]

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen x modulo 225 des folgenden Systems von Kongruenzen:
$$\begin{cases} 10x \equiv 15 \pmod{25} \\ 3x \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$$
(b) Bestimmen Sie alle Lösungen x modulo 459 des folgenden Systems von Kongruenzen:
$$\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{27} \\ 12x \equiv 9 \pmod{51} \end{cases}$$

Aufgabe 4. [2+6]

(a) Sei p eine Primzahl so dass $p > 5$. Zeigen Sie:
$$\left(\frac{5}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \equiv \pm 1 \pmod 5 \\ -1 & \text{falls } p \equiv \pm 2 \pmod 5. \end{cases}$$
(b) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der From $5k + 4$ für $k \in \mathbb{N}$ gibt.
(Hinweis: Betrachten Sie $(2 \cdot p_1 \cdots p_t)^2 - 5$.)

Aufgabe 5. Seien $f = x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ und $g = x^7 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) Lösen Sie die Gleichung $f \equiv 0 \mod 2^k$ für $k = 1, 2, 3$. Wie viele Nullstellen besitzt f modulo 2^n für alle $n \geqslant 3$.
(b) Wie viele Nullstellen besitzt g modulo 5^n und modulo 7^n für alle $n \geqslant 1$.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die letzte Ziffer von $3^{2018} + 2^{2018}$.

Aufgabe 7. Sei $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ so dass $a^2 + b^2 = c^2$. Zeigen Sie:

$$a \cdot b \cdot c \equiv 0 \pmod{60}.$$

Aufgabe 8. [AG4 Präsenzblatt 2] Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Zeigen Sie: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}$ mit Betrands Postulat. (Hinweis: Es gibt eine Primzahl p, so dass $\frac{n}{2} < p < n$.)

Aufgabe 9.

(a) Ist 2 eine Primitivwurzel modulo 11?
(b) Bestimmuen Sie alle Lösungen der Kongruenz:

$$x^6 \equiv 5 \pmod{11}.$$

Aufgabe 10. Finden Sie alle $a \in \mathbb{F}_{11}$ so dass

$$\mathbb{F}_{121} \cong \mathbb{F}_{11}[X]/(X^2 - a).$$

Aufgabe 11. [AG3 Übungsblatt 6] Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in R$ heißt nilpotent, falls eine natürliche Zahl k existiert, so dass $x^k = 0$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $N := \{x \in R\ ;\ x \text{ ist nilpotent}\}$ ein Ideal ist. N heißt das Nilradikal von R.
(b) Was ist das Nilradikal von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Aufgabe 12.

(a) Es sei $p \in \mathbb{P}$, $p \leqslant 15$. Entscheiden Sie, ob p träge, zerlegt oder verzweigt in $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ ist.
(b) Schreiben Sie $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ in der Form

$$2 = \epsilon \cdot \pi^2,$$

für eine Einheit $\epsilon \in \mathbb{Z}[\sqrt{6}]^\times$ und $\pi \in \mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ irreduzibel.

Aufgabe 13

(a) Finden Sie eine Primitivwurzel für 7^{10}.
(b) Finden Sie eine Primitivwurzel für $686 = 2 \times 7^3$.

Aufgabe 14 Sei $n \in \mathbb{N}$ und p_n die n-te Primzahl. Zeigen Sie: $p_n < 2^n$.

Aufgabe 15 Sei $n = 6k - 1$ für $k \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $m \in \mathbb{N}_{>1}$, so dass $m \neq x^2$ für $x \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{d|m} d = \sum_{d|m, d<\sqrt{m}} d + \frac{d}{m}.$$

(b) Sei d ein Teiler von n. Zeigen Sie, dass $3 \mid d + \frac{n}{d}$ gilt.
(c) Zeigen Sie, dass n keine vollkommene Zahl ist.

andere wichtige Übungen Übungsblatt 7 AG 3, Übungsblatt 10 AG 1, Übungsblatt 12 AG 3 und Übungsblatt 13 AG 1, 4.