ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
13. ÜBUNGSBLATT

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1. [1+1+2 Punkte] Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

(a) Ist 3 irreduzibel in R?
(b) Zeigen Sie: 81 ist ein Produkt von 4 irreduziblen und auch ein Produkt von zwei irreduziblen Elementen. (Hinweis: Betrachten Sie $5 + 2\sqrt{-14}$.)
(c) Welche der ersten neun Primzahlen sind träge, Zerlegt oder verzweigt in R?

Aufgabe 2. [3 Punkte] Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei. Seien $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ und $\mathcal{O}_K$ der Ring der ganzen Zahlen.

(a) Zeigen Sie: 2 ist verzweigt in $\mathcal{O}_K$ falls $d \equiv 2, 3 \pmod 4$.
(b) Zeigen Sie: 2 ist träge in $\mathcal{O}_K$ falls $d \equiv 5 \pmod 8$.
(c) Zeigen Sie: 2 ist zerlegt in $\mathcal{O}_K$ falls $d \equiv 1 \pmod 8$.

Aufgabe 3. [4 Punkte]

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein euklidischer Ring ist.

Aufgabe 4. [5 Punkte] Das Ziel dieses Aufgabe ist zu zeigen, dass $(x, y) = (1, 0)$ die enzige Lösung in $\mathbb{Z}^2$ der folgenden Gleichung ist:

$$y^2 = x^3 - 1$$

Sei $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung von $y^2 = x^3 - 1$.

(a) Zeigen Sie, dass x eine ungerade Zahl ist. (Hinweis: Reduzieren Sie modulo 8.)
(b) In $\mathbb{Z}[i]$ gilt $x^3 = (y + i)(y - i)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Norm:
$$\mathsf{ggT}(y + i, y - i) = 1.$$
(c) Zeigen Sie: $(y + i)$ und $(y - i)$ sind dritte Potenzen ($\exists r \in \mathbb{Z}[i]\ ;\ r^3 = (y + i)$).
(d) Es gibt $m, n \in \mathbb{Z}$ so dass $y + i = (m + ni)^3$. Zeigen Sie:
$$y = m(m^2 - 3n^2) \text{ und } 1 = n(3m^2 - n^2).$$
(e) Zeigen Sie: $(x, y) = (1, 0)$.

Abgabe: Freitag, 13. Juli 2018, bis 10 Uhr in die Postfächer der Tutoren in V3-126.