ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
4. ÜBUNGSBLATT

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1. [1+2+1 Punkte] Seien u, ν, E die Funktionen $\mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C}$ definiert durch $u(n) = 1$, $\nu(1) = 1$ und $\nu(n) = 0$ für $n \neq 1$ und $E(n) = n$ für alle n.

(a) Zeigen Sie: $\mu \star u = \nu$ und $u^{-1} = \mu$.
(b) Zeigen Sie: $\phi = E \star \mu$.
(c) Zeigen Sie: ϕ ist multiplikativ.

Aufgabe 2. [3 Punkte] Sei $f : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton steigende multiplikative Funktion mit $f(2) = 2$. Zeigen Sie:

$$f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Aufgabe 3. [2+2 Punkte] Beweisen oder wiederlegen Sie:

(a) Seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\gamma(n) = \prod_{\substack{p|n \\ p\in\mathbb{P}}} p$.

$$\gamma(n) = \sum_{d|n} |\mu(d)|\phi(d).$$

(b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine multikative Funktion.

$$\Big(\forall p \in \mathbb{P}, \lim_{k\to\infty} f(p^k) = 0\Big) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

Aufgabe 4. [1+1+1+2 Punkte] Sei $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$. Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ heißt k-vollkommen, falls $\sigma(n) = kn$ gilt.

(a) Finden Sie die 1-vollkommenen Zahlen.
(b) Seien p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ so dass n k-vollkommen ist. Zeigen Sie:

$$\mathsf{ggT}(n, p) = 1 \Rightarrow pn \text{ ist } (p+1)\text{-vollkommen.}$$

(c) Finden Sie die kleinste 3-vollkommene Zahl[1].
(d) Sei n eine ungerade 3-vollkommene Zahl. Zeigen Sie:

$$\exists m \in \mathbb{N}_{>0} \text{ so dass } n = m^2.$$

Abgabe: Freitag, 11. Mai 2018, bis 10 Uhr in die Postfächer der Tutoren in V3-126.
[1]für weidere Details : https://oeis.org/A005820