

GRAPHES ET COMBINATOIRE

TABLE DES MATIÈRES

Notations

CHAPITRE I. COMBINATOIRE ÉNUMÉRATIVE

§1. Application d'un ensemble E dans un ensemble F	1
§2. Famille indexée	4
§3. Relation binaire	5
§4. Principe de récurrence. Suites récurrentes, fonctions génératrices	6
§5. Notion de cardinal. Ensembles finis. Ensembles dénombrables	12
§6. Propriétés de dénombrement des ensembles finis	15

CHAPITRE II. THÉORIE DES GRAPHES

§1. Graphes simples	27
§2. Multigraphes	31
§3. Matrices associées à un graphe	35
§4. Sous-graphes. Graphes couvrants	37
§5. Coloration d'un graphe	38
§6. Chaînes d'un graphe	41
§7. Graphes connexes	45
§8. Cycles d'un graphe	48
§9. Arbres	49
§10. Graphes eulériens	55
§11. Graphes hamiltoniens	57
§12. Graphes orientés	58

NOTATIONS

Toutes les notations particulières à ce cours sont définies dans le texte lors de leur emploi, et ont généralement une valeur locale, limitée au paragraphe où elles sont employées. Les quelques notations ayant une valeur globale (pour les quatre tomes du cours) sont énumérées ci-dessous.

\in : symbole d'appartenance, \notin : symbole de non appartenance.
 \forall : quantificateur universel, \exists : quantificateur existentiel.
 \Rightarrow : implication logique, \Leftrightarrow : équivalence logique.
 \cup : réunion, \cap : intersection.
 \subset : inclusion, \emptyset : ensemble vide.
 $\exists!$: abréviation pour "il existe un seul".

$\mathcal{P}(E)$: ensemble des parties de l'ensemble E .

$E \setminus A$: ensemble des éléments de l'ensemble E , n'appartenant pas au sous-ensemble A de E .

$\{x \in E \mid \mathcal{P}\}$: ensemble des éléments x de E , possédant la propriété \mathcal{P} .

$E \times F, \prod_{i=1}^n E_i, E^n$: produits cartésiens d'ensembles.

$(a_i)_{i \in I}$: famille d'éléments d'un ensemble E , indexée par un ensemble I .

$\sum_{i=1}^n a_i$: somme des éléments de la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, dans le cas où E est muni d'une loi additive.

$\prod_{i=1}^n a_i$: produit des éléments de la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, dans le cas où E est muni d'une loi multiplicative.

\mathbb{N} : ensemble des entiers naturels, \mathbb{Z} : anneau des entiers relatifs.

$\llbracket n, p \rrbracket$: ensemble des entiers i tels que $n \leq i \leq p$ (où n et p sont des entiers tels que $n \leq p$).

\mathbb{Q} : corps des rationnels, \mathbb{R} : corps des réels, \mathbb{C} : corps des complexes.
 $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$n! = \prod_{i=1}^n i$: factorielle n (pour n entier naturel, avec la convention $0! = 1$).

$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$: nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

$f: E \longrightarrow F$
 $x \longmapsto y$ application de E dans F , qui à tout élément x de E associe l'élément y de F .

$f^{-1}(A)$: image réciproque par l'application f de la partie A de l'ensemble F .

f^{-1} : application réciproque de l'application f , dans le cas où elle est bijective.

$g \circ f$: application composée de f et g .

id_E : application identité de l'ensemble E .

$\max(A)$: plus grand élément de l'ensemble ordonné A , s'il existe,

$\min(A)$: plus petit élément de l'ensemble ordonné A , s'il existe.

CHAPITRE I

COMBINATOIRE ÉNUMÉRATIVE

Les notions élémentaires de théorie des ensembles sont supposées connues

Rappelons que, soit n et p des entiers, tels que $n \leq p$, on note :

$$\llbracket n, p \rrbracket = \{i \in \mathbb{Z} \mid n \leq i \leq p\}.$$

§1. Application d'un ensemble E dans un ensemble F

Définition 1.1 : Soit E et F des ensembles non vides, une *application* f de E dans F est la donnée, pour tout élément x de E d'un unique élément y , noté $f(x)$ de F . On dit alors que y est l'*image* de x par f et que x est un *antécédant* de y .

Notation :

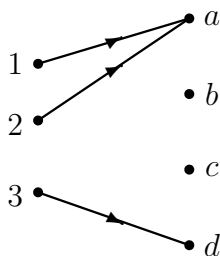
$$\begin{array}{l} f : E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

Interprétation au moyen d'un graphe orienté:

On représente les éléments de E et de F par des points et on relie un élément x de E à un élément y de F par une flèche de x vers y , si $y = f(x)$.

Exemple :

$E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{a, b, c, d\}$, f définie par : $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = d$.



Remarque : Un élément x de E a une unique image par f . Mais un élément y de F peut avoir un ou plusieurs antécédants, ou ne pas en avoir.

Définitions 1.2 :

Soit A une partie de E , l'*image* de A par f est le sous-ensemble de F :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A : f(x) = y\}.$$

L'ensemble $f(E)$ est noté $\text{im } f$.

Soit B une partie de F . L'*image réciproque* de B par f est le sous-ensemble de E :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Définitions 1.3 :

a) On dit qu'une application f de E dans F est *injective* (ou est une *injection*) si :

$$\forall x \in E, \forall x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Ceci équivaut à

$$\forall x \in E, \forall x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Interprétation au moyen d'un graphe orienté :

Tout élément de F est extrémité finale d'au plus une flèche.

b) On dit qu'une application f de E dans F est *surjective* (ou est une *surjection*) si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x).$$

Ceci équivaut à

$$\text{im } f = F.$$

Interprétation au moyen d'un graphe orienté :

Tout élément de F est extrémité finale d'au moins une flèche.

c) On dit qu'une application f de E dans F est *bijjective* (ou est une *bijection*), si elle est à la fois injective et surjective. Ceci équivaut à :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x).$$

Interprétation au moyen d'un graphe orienté :

Tout élément de F est extrémité finale d'exactlyement une flèche.

Dans ce cas, on peut définir une application de F dans E , appelée *application réciproque* de f et notée f^{-1} . L'application f^{-1} est caractérisée par :

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

Remarque : Ne pas confondre l'image réciproque d'une partie de F , qui est définie pour toute application f de E dans F et l'application réciproque de l'application f qui n'est définie que si f est bijective.

Théorème 1.4 : (*Principe de recollement*)

Soit deux applications :

$$\begin{aligned} f &: E \longrightarrow F \\ g &: E' \longrightarrow F' \end{aligned}$$

où E et E' sont deux ensembles non vides, disjoints, et F et F' sont deux ensembles non vides, disjoints. On définit l'application :

$$h : E \cup E' \longrightarrow F \cup F'$$

par :

$$\begin{aligned} \text{si } x \in E, h(x) &= f(x), \\ \text{si } x \in E', h(x) &= g(x). \end{aligned}$$

- 1) L'application h est injective, si et seulement si f et g sont injectives.
- 2) L'application h est surjective, si et seulement si f et g sont surjectives.
- 3) L'application h est bijective, si et seulement si f et g sont bijectives.

Preuve :

1) Supposons f et g injectives et soit x et x' des éléments de $E \cup E'$, tels que $h(x) = h(x')$.

Si x appartient à E et x' appartient à E' , on a $h(x) = f(x)$, qui appartient à F et $h(x') = g(x')$, qui appartient à F' . La condition $h(x) = h(x')$ est alors contradictoire avec F et F' disjoints.

Si x et x' appartiennent à E , on a $f(x) = f(x')$ et si x et x' appartiennent à E' , on a $g(x) = g(x')$. Dans les deux cas, on obtient $x = x'$.

On a ainsi prouvé que l'application h est injective.

Réciproquement, supposons h injective et soit x et x' des éléments de E , tels que $f(x) = f(x')$. On a alors $h(x) = h(x')$, donc $x = x'$. On a ainsi prouvé que l'application f est injective. On montre de même que l'application g est injective.

2) L'application h est surjective, si et seulement si $\text{im } h = F \cup F'$. Or, on a : $\text{im } h = \text{im } f \cup \text{im } g$. De plus, les ensembles F et F' étant disjoints, il en est de même de leurs sous-ensembles respectifs $\text{im } f$ et $\text{im } g$. Donc,

$$\text{im } h = F \cup F' \iff (\text{im } f = F \text{ et } \text{im } g = F').$$

3) découle de 1) et 2).

Définition 1.5 : Soit des applications

$$f : E \longrightarrow F \text{ et } g : F \longrightarrow G.$$

La *composée* de f et g , notée $g \circ f$ est l'application:

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Propriétés 1.6 :

La composée de deux applications injectives est injective.

La composée de deux applications surjectives est surjective.

La composée de deux applications bijectives est bijective et, avec les notations de la définition 1.5, si les applications f et g sont bijectives, on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

La vérification (facile) est laissée au lecteur.

§2. Famille indexée

Définition 2.1 : Soit E un ensemble non vide et soit I un ensemble non vide, que nous appellerons *ensemble d'indices*, une *famille de E indexée par I* est une application :

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow E \\ i &\longmapsto a_i \end{aligned}$$

qui sera notée $(a_i)_{i \in I}$.

Ne pas confondre $(a_i)_{i \in I}$ et $\text{im } \varphi = \{a_i \mid i \in I\}$.

Exemple : Soit

$$\varphi : \{1,2,3\} \longrightarrow \{a,b,c,d\},$$

définie par : $\varphi(1) = \varphi(2) = a$, $\varphi(3) = d$.

On a : $\varphi = (a,a,d)$ et $\text{im } \varphi = \{a,d\}$.

Cas particuliers :

Si $I = \mathbb{N}$, une famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est appelée *suite* de E .

Si $I = \llbracket 1,p \rrbracket$, une famille $(a_n)_{n \in \llbracket 1,p \rrbracket}$ de E , est appelée *p -uplet* ou *p -liste* de E et est notée (a_1, \dots, a_p) .

Rappel : Pour tout ensemble E , on admet l'existence d'un unique ensemble, dont les éléments sont les parties de E . Cet ensemble est noté $\mathcal{P}(E)$.

Définition 2.2 : Une *partition* de E est une famille indexée $(A_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{P}(E)$, telle que :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = E,$$

$$\forall i \in I, A_i \neq \emptyset,$$

$$\forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Définition 2.3 : Soit (E_1, \dots, E_p) une p -liste de sous-ensembles non vides d'un ensemble E . On appelle *produit cartésien* des ensembles E_1, \dots, E_p , l'ensemble :

$$E_1 \times \dots \times E_p = \{(x_1, \dots, x_p) \mid \forall i \in \llbracket 1,p \rrbracket, x_i \in E_i\}.$$

L'ensemble $E_1 \times \dots \times E_p$ est aussi noté $\prod_{i=1}^p E_i$.

Cas particulier : Si, pour tout i de $\llbracket 1,p \rrbracket$, $E_i = E$, on note E^p le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_p$, c'est-à-dire l'ensemble des p -liste de E .

§3. Relation binaire

Définition 3.1 : Une *relation binaire* \mathcal{R} sur un ensemble non vide, E , est un sous-ensemble de $E \times E$.

Notation : $(x,y) \in \mathcal{R}$ est notée $x\mathcal{R}y$.

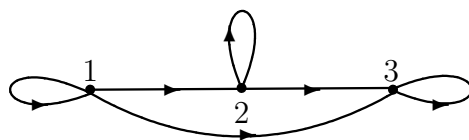
Interprétation au moyen d'un graphe orienté :

On représente les éléments de E par des points et on relie un élément x de E à un élément y de E par une flèche de x vers y , si $x\mathcal{R}y$.

Exemple : La relation \leq sur l'ensemble d'entiers $\{1,2,3\}$ est le sous-ensemble de $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\},$$

représenté par le graphe :



Définitions 3.2 : Une relation binaire sur E est dite :

<i>réflexive</i>	si : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x,$
<i>symétrique</i>	si : $\forall (x,y) \in E \times E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x,$
<i>antisymétrique</i>	si : $\forall (x,y) \in E \times E, (x\mathcal{R}y) \text{ et } (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y,$
<i>transitive</i>	si : $\forall (x,y,z) \in E \times E \times E, (x\mathcal{R}y) \text{ et } (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$

Définitions 3.3 : On appelle *relation d'équivalence*, une relation binaire, réflexive, symétrique et transitive.

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E . Pour tout x de E , on appelle *classe d'équivalence* de x , l'ensemble

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

Propriété 3.4 :

- 1) L'ensemble des classes d'équivalence est alors une partition de E .
- 2) Réciproquement, toute partition de E détermine une relation d'équivalence.

La vérification est laissée au lecteur, en montrant, pour la réciproque, que, si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E , on définit une relation d'équivalence \mathcal{R} sur E , par :

$$\forall (x,y) \in E \times E, x\mathcal{R}y \iff \exists i \in I : x \in A_i \text{ et } y \in A_i.$$

Définitions 3.5 :

a) On appelle *relation d'ordre*, une relation binaire, réflexive, antisymétrique et transitive. Un *ensemble ordonné* est un ensemble muni d'une relation d'ordre.

b) Soit E un ensemble ordonné. Notons \leq la relation d'ordre. Soit A une partie non vide de E , un *majorant* de A est un élément m de E , tel que :

$$\forall x \in A, x \leq m,$$

un *minorant* de A est un élément m' de E , tel que :

$$\forall x \in A, m' \leq x.$$

c) Un sous-ensemble A de E admettant un majorant est dit *majoré* et un sous-ensemble A de E admettant un minorant est dit *minoré*.

d) On dit que m est *plus grand élément* de A , si m est un majorant de A appartenant à A . Cet élément, s'il existe, est unique.

On dit que m' est *plus petit élément* de A , si m' est un minorant de A appartenant à A . Cet élément, s'il existe, est unique.

Propriétés 3.6 : (*Propriétés des entiers liées à la relation d'ordre*)

- 1) Tout sous-ensemble *non vide*, majoré de \mathbb{Z} admet un plus grand élément.
- 2) Tout sous-ensemble *non vide*, minoré de \mathbb{Z} admet un plus petit élément.
- 3) En particulier, tout sous-ensemble *non vide* de \mathbb{N} admet un plus petit élément.

Remarque : Un sous-ensemble, non vide, majoré de \mathbb{R} n'admet pas toujours un plus grand élément (contre-exemple : $[1,3[$).

§4. Principes de récurrence. Suites récurrentes, séries génératrices

Théorème 4.1: Soit $\mathcal{R}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n de \mathbb{N} .

Si la proposition $\mathcal{R}(0)$ est vraie et si on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{R}(n) \Rightarrow \mathcal{R}(n+1),$$

alors, pour tout n de \mathbb{N} , la proposition $\mathcal{R}(n)$ est vraie.

Preuve : Soit E l'ensemble des entiers n de \mathbb{N} , tels que la proposition $\mathcal{R}(n)$ est fausse.

Supposons que l'ensemble E soit non vide. D'après la propriété 3.6.3, il admettrait un plus petit élément n_0 . Or 0 n'appartient pas à E , donc n_0 serait non nul et $n_0 - 1$ appartiendrait à \mathbb{N} . Par définition de n_0 , $\mathcal{R}(n_0 - 1)$ serait vraie, donc $\mathcal{R}(n_0)$ serait vraie, ce qui contredirait le fait que n_0 est élément de E .

On en déduit que E est vide et que, pour tout n de \mathbb{N} , $\mathcal{R}(n)$ est vraie.

Corollaire 1 : Soit $\mathcal{R}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n de \mathbb{N} .

Si la proposition $\mathcal{R}(0)$ est vraie et si on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{R}(0) \text{ et } \dots \text{ et } \mathcal{R}(n)) \Rightarrow \mathcal{R}(n+1),$$

alors pour tout n de \mathbb{N} , la proposition $\mathcal{R}(n)$ est vraie.

Preuve : Notons $\mathcal{R}'(n)$ la proposition :

$$\mathcal{R}(0) \text{ et } \cdots \text{ et } \mathcal{R}(n).$$

On a :

$$\mathcal{R}(0) \iff \mathcal{R}'(0).$$

De plus, si on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{R}(0) \text{ et } \cdots \text{ et } \mathcal{R}(n)) \Rightarrow \mathcal{R}(n+1),$$

on a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{R}(0) \text{ et } \cdots \text{ et } \mathcal{R}(n)) \Rightarrow (\mathcal{R}(0) \text{ et } \cdots \text{ et } \mathcal{R}(n+1)),$$

donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{R}'(n) \Rightarrow \mathcal{R}'(n+1).$$

On applique alors le théorème 4.1 à la proposition $\mathcal{R}'(n)$.

Remarque : L'hypothèse de ce corollaire est moins restrictive que celle du théorème 4.1.

Corollaire 2 : Soit $\mathcal{R}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n de \mathbb{N} et soit q un élément de \mathbb{N} . Si la proposition $\mathcal{R}(q)$ est vraie et si on a :

$$\forall n \geq q, \mathcal{R}(n) \Rightarrow \mathcal{R}(n+1),$$

alors pour tout entier n supérieur ou égal à q , la proposition $\mathcal{R}(n)$ est vraie.

Preuve : Pour tout n de \mathbb{N} , notons $\mathcal{Q}(n)$ la proposition $\mathcal{R}(n+q)$. On applique alors le théorème 4.1 à la proposition $\mathcal{Q}(n)$.

Théorème et définition 4.2 : Soit E un ensemble non vide et soit f une application :

$$f : \mathbb{N} \times E \longrightarrow E.$$

Il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , définie par la donnée de u_0 et la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(n, u_n).$$

Une telle suite est appelée *suite récurrente*.

Preuve : Pour tout n de \mathbb{N}^* , notons $\mathcal{R}(n)$ la proposition :

$$\mathcal{R}(n) \quad \begin{array}{l} \text{il existe une unique } (n+1)\text{-liste } (u_0, \dots, u_n) \text{ de } E, \\ \text{telle que } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, u_{k+1} = f(k, u_k). \end{array}$$

On applique alors, à cette proposition, le corollaire 2 du théorème 4.1, avec $q = 1$.

Remarque 1 : Noter l'importance du terme initial u_0 :

Pour $E = \mathbb{N}$ et $f(n, u_n) = 2u_n$, le terme initial $u_0 = 1$ définit la suite de terme général 2^n , alors que le terme initial $u_0 = 0$ définit la suite constante nulle.

Remarque 2 : Soit E un ensemble non vide et soit une application :

$$f : \mathbb{N} \times E \times E \longrightarrow E.$$

On définit de même une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , par la donnée de u_0 et u_1 et par la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(n, u_{n+1}, u_n).$$

Corollaire et définition 4.3 : Il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{N} , définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n.$$

Pour tout n de \mathbb{N} , l'élément u_n de \mathbb{N} ainsi défini est appelé *factorielle n* et notée $n!$.

Conséquences : On a : $0! = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \prod_{i=1}^n i$.

Rappels 4.4 : (*Suites récurrentes linéaires*)

Les résultats suivants, obtenus par un raisonnement d'algèbre linéaire, sont à revoir dans un cours de 1ère année.

a) Soit a et u_0 des réels. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par u_0 et la condition

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n,$$

a pour terme général :

$$u_n = a^n u_0.$$

b) Soit a, b, u_0, u_1 des réels, tels que b soit non nul. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par u_0, u_1 et la condition

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle équation caractéristique de cette suite, l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$

1er cas : L'équation caractéristique admet deux racines réelles, distinctes r_1 et r_2

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de terme général :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

où λ et μ sont les réels déterminés par :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$$

2ème cas : L'équation caractéristique admet une racine double r

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de terme général :

$$u_n = (\lambda n + \mu)r^n,$$

où λ et μ sont les réels déterminés par :

$$\begin{cases} \mu = u_0 \\ \lambda r + \mu r = u_1 \end{cases}$$

3ème cas : L'équation caractéristique admet deux racines complexes, non réelles $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de terme général :

$$u_n = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta),$$

où λ et μ sont les réels déterminés par :

$$\begin{cases} \lambda & = u_0 \\ \lambda \rho \cos \theta + \mu \rho \sin \theta & = u_1 \end{cases}$$

Définitions 4.5 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On appelle *série génératrice* (ou *fonction génératrice*) associée à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la série formelle

$$S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n.$$

Soit alors $S(X)$ et $T(X)$ des séries formelles associées, respectivement aux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et soit λ un réel. On définit les séries formelles :

$(\lambda S)(X)$, associée à la suite $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$(S + T)(X)$, associée à la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$(ST)(X)$, associée à la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{i=0}^n u_i v_{n-i}$,

$T \circ S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n S^n(X)$.

La définition de $T \circ S(X)$ est justifiée par celle de $ST(X)$, qui permet de définir, par récurrence, $S^n(X)$, pour tout entier naturel n .

Théorème 4.6 : Soit $S(X)$ une série formelle, associée à une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que u_0 soit non nul. Il existe une unique série formelle $T(X)$, telle que $(ST)(X)$ soit la série formelle associée à la suite $(1, 0, \dots, 0, \dots)$. On notera alors $(S^{-1})(X)$ ou $\frac{1}{S(X)}$ la série formelle $T(X)$.

La vérification (facile) est laissée au lecteur.

Séries formelles usuelles

1) Soit $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$. On vérifie facilement que $\frac{1}{S(X)} = 1 - X$, donc que :

$$\frac{1}{1 - X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n.$$

Conséquence : Soit $P(X)$ et $Q(X)$ des polynômes formelles (séries formelles, dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang), avec $Q(X)$ associé à une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que v_0 soit non nul. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelles formelle $R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ permet alors, théoriquement, d'explicitier la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée à la série formelle $R(X)$.

En pratique, on utilise, pour p entier, les développements en séries entières des fonctions $\frac{1}{(1-x)^p}$ (obtenus par dérivation), pour calculer les suites associées aux séries formelles $\frac{1}{(1-X)^p}$.

2) Il existe une unique série formelle $S(X)$, qui vérifie $S^2(X) = 1 - X$ et qui est associée à une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $u_0 = 1$. (*La vérification est laissée au lecteur.*) On notera alors $S(X) = \sqrt{1 - X}$. Comme précédemment, on peut calculer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en utilisant le développement en séries entières de la fonction $\sqrt{1-x}$.

Exemples d'applications

1) Soit a, b, u_0, u_1 des réels, tels que b soit non nul, et soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par u_0, u_1 et la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Soit $S(X)$ la série génératrice de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a :

$$\begin{aligned} S(X) &= u_0 + u_1X + u_2X^2 + \dots + u_nX^n + \dots \\ aXS(X) &= au_0X + au_1X^2 + \dots + au_{n-1}X^n + \dots \\ bX^2S(X) &= bu_0X^2 + \dots + bu_{n-2}X^n + \dots \end{aligned}$$

Avec, pour $n \geq 2$, $u_n - au_{n-1} - bu_{n-2} = 0$, on obtient :

$$(1 - aX - bX^2)S(X) = u_0 + u_1X - au_0X.$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle formelle

$$S(X) = \frac{u_0 + u_1X - au_0X}{1 - aX - bX^2}$$

permet de calculer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de retrouver les résultats de 4.4.

2) Considérons un produit de réels : $\pi_n = \alpha_1 \dots \alpha_n$. On cherche à calculer π_n , en n'utilisant que des produits de deux nombres. Par exemple :

$$\begin{aligned}\pi_3 &= (\alpha_1\alpha_2)\alpha_3 &= \alpha_1(\alpha_2\alpha_3) \\ \pi_4 &= ((\alpha_1\alpha_2)\alpha_3)\alpha_4 &= (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4) &= (\alpha_1(\alpha_2\alpha_3))\alpha_4 \\ &= \alpha_1((\alpha_2\alpha_3)\alpha_4) &= \alpha_1(\alpha_2(\alpha_3\alpha_4))\end{aligned}$$

Soit u_n le nombre de parenthésages distincts, dont on peut munir π_n pour le calculer.

On a $u_2 = 1$ et, en posant $u_1 = 1$, on montre que $\forall n \geq 2$, $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}$.

En utilisant le principe de récurrence (théorème 4.1), on en déduit l'existence d'une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 2, u_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}.$$

Considérons maintenant, pour $n \geq 2$, un polygone convexe à $n + 1$ sommets A_0, A_1, \dots, A_n . On montre que u_n est aussi le nombre de triangulations de ce polygone, par $n - 2$ diagonales non sécantes, en $n - 1$ triangles.

Posons $u_0 = 0$ et soit $S(X)$ la série génératrice associée à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a :

$$\begin{aligned}S(X) &= u_1 X + u_2 X^2 + \dots + u_n X^n + \dots \\ S^2(X) &= u_1^2 X^2 + \dots + (u_1 u_{n-1} + \dots + u_{n-1} u_1) X^n + \dots \\ &= u_2 X^2 + \dots + u_n X^n + \dots\end{aligned}$$

On en déduit $S^2(X) - S(X) + X = 0$, donc $S(X) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4X}}{2}$. et avec $S(0) = 0$,

$$S(X) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4X}}{2}.$$

En utilisant le développement en série entière de $(1 + u)^r$:

$$(1 + u)^r = 1 + ru + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!} u^n + \dots,$$

on obtient, avec $r = \frac{1}{2}$ et $u = -4X$:

$$\sqrt{1 - 4X} = 1 + \frac{1}{2}(-4X) + \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)\dots(\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} (-4X)^n + \dots$$

Or, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4)^n &= \frac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}(-4)^n \\ &= -\frac{(2n-2)!}{2\cdots(2n-2)2^n n!}4^n \\ &= -\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!2^n n!}4^n \\ &= -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Les nombres u_1, \dots, u_n, \dots sont appelés *nombres de Catalan* et ont de nombreuses autres applications en combinatoire.

§5. Notion de cardinal. Ensembles finis. Ensembles dénombrables

Définition 5.1 : On dit qu'un ensemble E est *fini* si :

soit E est vide

soit il existe un entier strictement positif n et une bijection

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \llbracket 1, n \rrbracket & \longrightarrow & E \\ & i \longmapsto & a_i \end{array}$$

Un ensemble non fini est dit *infini*.

Théorème 5.2 : Soit n et p des entiers strictement positifs.

- (i) Il existe une injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, si et seulement si $n \leq p$.
- (ii) Il existe une surjection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, si et seulement si $p \leq n$.
- (iii) Il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, si et seulement si $n = p$.

Preuve :

(i) Supposons $n \leq p$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \llbracket 1, n \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket 1, p \rrbracket \\ & i \longmapsto & i \end{array}$$

est injective.

Réciproquement, montrons, par récurrence la proposition $\mathcal{R}(n)$:

pour tout entier p fixé dans \mathbb{N}^* ,

$\mathcal{R}(n)$ s'il existe une application injective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$,
on a $n \leq p$.

La proposition $\mathcal{R}(1)$ est triviale.

Soit alors $n \geq 2$. Supposons que la proposition $\mathcal{R}(n-1)$ soit vraie et qu'il existe une application injective, φ , de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.

Si on avait $p = 1$, l'application φ étant injective, on aurait $n = 1$, ce qui est exclus. On a donc $p \geq 2$.

Dans le cas où $\varphi(n) = p$, l'application

$$\tilde{\varphi} : \llbracket 1, n-1 \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, p-1 \rrbracket,$$

qui coïncide avec φ sur $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ est injective et, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $n-1 \leq p-1$, donc $n \leq p$.

Dans le cas où $\varphi(n) < p$, on considère la bijection f de $\llbracket 1, p \rrbracket$, qui échange p et $\varphi(n)$ et laisse fixes tous les autres éléments de $\llbracket 1, p \rrbracket$. L'application $\psi = f \circ \varphi$ est alors injective et telle que $\psi(n) = f \circ \varphi(n) = p$. L'étude du premier cas prouve alors que $n \leq p$.

(ii) Supposons $p \leq n$. Soit φ l'application de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, définie par :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, & \quad \varphi(i) = i \\ \forall i \in \llbracket p, n \rrbracket, & \quad \varphi(i) = p. \end{aligned}$$

Cette application est surjective.

Réciproquement, soit φ une application surjective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Pour tout élément i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, l'ensemble $\varphi^{-1}(\{i\})$ est non vide, donc d'après la propriété 3.6.3, admet un plus petit élément $\psi(i)$, appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$. L'application

$$\psi : \llbracket 1, p \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket,$$

ainsi définie, est alors injective, car :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \varphi^{-1}(\{i\}) \cap \varphi^{-1}(\{j\}) = \emptyset.$$

On en déduit, d'après (i), $p \leq n$.

(iii) découle des propriétés (i) et (ii).

Corollaire 1 : Soit E un ensemble fini non vide. L'entier n , strictement positif, tel qu'il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E , est unique.

Preuve : S'il existe une bijection φ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E et une bijection ψ de $\llbracket 1, n' \rrbracket$ dans E , l'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n' \rrbracket$. La partie (iii) du théorème 5.2 prouve alors que $n = n'$.

Définition 5.3 : Avec les hypothèses du corollaire 1, on dit que E est de *cardinal* n et que n est le *nombre d'éléments* de E et on note $E = \{a_1, \dots, a_n\}$. Dans le cas où E est vide, on convient que E est de *cardinal zéro*.

Notation : Le cardinal d'un ensemble fini E est noté

$$\text{Card } E \text{ ou } |E|.$$

Corollaire 2 : Soit E et F des ensembles finis, non vides.

Il existe une injection de E dans F , si et seulement si $|E| \leq |F|$.

Il existe une surjection de E dans F , si et seulement si $|F| \leq |E|$.

Il existe une bijection de E dans F , si et seulement si $|E| = |F|$.

La preuve est immédiate

Définition 5.4 :

On dit que deux ensembles E et F , finis ou non, ont *même cardinal*, s'il existe une bijection de E dans F .

Remarque : Les définitions 5.1 et 5.4 sont cohérentes : Les ensembles E et F finis, non vides, sont de même cardinal, si et seulement s'il existe une bijection de E dans F .

Corollaire 3 : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et soit a un élément de E . L'ensemble $E \setminus \{a\}$ est fini, de cardinal $n - 1$.

Preuve : Pour $n = 1$, $E = \{a\}$ et $E \setminus \{a\}$ est de cardinal zéro.

Pour $n > 1$, soit φ une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E . Dans le cas où $\varphi(n) = a$, l'application :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \llbracket 1, n-1 \rrbracket &\longrightarrow E \setminus \{a\} \\ i &\longmapsto \varphi(i) \end{aligned}$$

est bijective. Sinon, soit ψ la bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$, qui échange n et $\varphi^{-1}(a)$ et laisse fixes les autres éléments. L'application $\varphi \circ \psi$ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E , telle que $\varphi \circ \psi(n) = a$. On est alors ramené au cas précédent.

Corollaire 4 : Soit E et F des ensembles finis, non vides, de même cardinal et soit f une application de E dans F . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application f est injective.
- (ii) L'application f est surjective.
- (iii) L'application f est bijective.

Preuve : Il suffit de montrer l'équivalence entre les propositions (i) et (ii).

Supposons f injective, non surjective. Il existe un élément a de F , qui n'appartient pas à $\text{im } f$. L'application :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow F \setminus \{a\} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est injective, avec $|F \setminus \{a\}| = |F| - 1 = |E| - 1 < |E|$, ce qui est contraire au corollaire 2.

Réciproquement, supposons, f surjective, non injective. Il existe deux éléments a et b , distincts, de E , tels que $f(a) = f(b)$. L'application :

$$\begin{aligned} E \setminus \{b\} &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est surjective, avec $|E \setminus \{b\}| = |E| - 1 = |F| - 1 < |F|$, ce qui est encore contraire au corollaire 2.

Corollaire 5 : L'ensemble \mathbb{N} est infini.

Preuve : L'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n + 1 \end{aligned}$$

est injective, non surjective, car 0 n'appartient pas à $\text{im}\varphi$.

Corollaire 6 : Soit E et F des ensembles finis, non vides, s'il existe une application injective f de E dans F , et une application injective g de F dans E , il existe une application bijective de E dans F .

Preuve :

L'existence d'une application injective f de E dans F prouve que $|E| \leq |F|$.

L'existence d'une application injective g de F dans E prouve que $|F| \leq |E|$.

On en déduit que E et F sont de même cardinal, donc qu'il existe une application bijective de E dans F .

Remarque 1 : Le corollaire 4 prouve même que les applications f et g précédentes sont bijectives.

Remarque 2 : On admet que l'énoncé du corollaire 6 est encore valable pour des ensembles non finis (*théorème de Cantor–Bernstein*), mais, dans ce cas, les applications f et g ne sont pas nécessairement bijectives.

Contre-exemple : L'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}^2 \\ n &\longmapsto (n, 0) \end{aligned}$$

est injective, non surjective. Cependant, il existe une application injective de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} (voir T.D.).

Corollaire 7 : (*Principe des tiroirs*)

Soit E et F des ensembles finis, non vides, et soit $f : E \longrightarrow F$, si $|E| > |F|$, il existe deux éléments distincts x et x' de E , tels que $f(x) = f(x')$.

Preuve : D'après le corollaire 2, si $|E| > |F|$, l'application f n'est pas injective, d'où le résultat.

Définition 5.5 : On dit qu'un ensemble E est *dénombrable*, s'il a même cardinal que \mathbb{N} .

Exemples :

a) L'ensemble \mathbb{Z} est dénombrable.

En effet, définissons l'application $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} \text{si } n \geq 0, \varphi(n) &= 2n, \\ \text{si } n < 0, \varphi(n) &= -2n - 1. \end{aligned}$$

L'application φ est bijective (*la vérification est laissée au lecteur*, en utilisant le principe de recollement, théorème 1.4).

b) Les ensembles \mathbb{N}^2 et \mathbb{Q} sont dénombrables.

(*Voir T.D.*)

c) L'ensemble \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Admis.

§6. Propriétés de dénombrement des ensembles finis

Dans ce paragraphe, on résoudra quelques problèmes de dénombrement, c'est-à-dire que l'on calculera le nombre d'éléments de certains ensembles finis.

Exemples :

Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Nombre d'applications d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.

Théorème 6.1 : (*Principe d'inclusion*)

1) Soit E un ensemble fini et soit F une partie de E . L'ensemble F est fini et on a : $|F| \leq |E|$.

2) De plus, dans ce cas, on a : $|E| = |F| \iff E = F$.

Preuve :

1) Raisonnons par récurrence. Pour tout entier n , soit $\mathcal{R}(n)$ la proposition :

$\mathcal{R}(n)$: Si E est de cardinal n , tout sous-ensemble F de E est fini et $|F| \leq n$.

La proposition $\mathcal{R}(0)$ est trivialement vraie. Soit maintenant n un entier strictement positif. Supposons que la proposition $\mathcal{R}(n-1)$ soit vraie et montrons que la proposition $\mathcal{R}(n)$ est vraie.

Soit E un ensemble de cardinal n et soit F un sous-ensemble de E .

Si F est égal à E , il est fini et $|F| = |E|$.

Sinon, il existe un élément a de E n'appartenant pas à F . L'ensemble F est alors inclus dans l'ensemble $E \setminus \{a\}$, de cardinal $n-1$ (corollaire 3 du théorème 5.2), donc est fini, d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{R}(n-1)$ et $|F| \leq n-1 < n$.

2) Soit E un ensemble fini et soit F une partie de E , de même cardinal que E .

Si $|E| = |F| = 0$, on a : $E = F = \emptyset$.

Sinon, les ensembles E et F sont non vides et l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

est injective donc bijective, d'après le corollaire 4 du théorème 5.2. On en déduit $\text{im } \varphi = F$. Or, par définition de φ , on a : $\text{im } \varphi = E$. On a ainsi prouvé $E = F$.

La réciproque est immédiate.

Théorème 6.2 : (*Principe d'addition*)

Soit A et B deux parties finies, *disjointes*, d'un ensemble E . L'ensemble $A \cup B$ est fini et on a :

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Preuve : Si l'un au moins des ensembles A ou B est vide, le résultat est immédiat.

Sinon, soit n le cardinal de A et p le cardinal de B . Il existe des applications bijectives :

$$\begin{aligned} f &: \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow A, \\ g &: \llbracket 1, p \rrbracket \longrightarrow B. \end{aligned}$$

Or, l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \llbracket 1, p \rrbracket &\longrightarrow \llbracket n+1, n+p \rrbracket \\ i &\longmapsto n+i \end{aligned}$$

est bijective (à vérifier) et il en est de même de l'application :

$$g \circ \varphi^{-1} : \llbracket n+1, n+p \rrbracket \longrightarrow B.$$

Le principe de recollement (théorème 1.4) permet, alors, de construire une bijection :

$$h : \llbracket 1, n+p \rrbracket \longrightarrow A \cup B.$$

Corollaire 1 : Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et soit (A_1, \dots, A_n) une famille finie de parties finies d'un ensemble E , deux à deux disjointes.

L'ensemble $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est fini et on a :

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

La preuve, par récurrence, est laissée au lecteur.

Corollaire 2 : (*Principe des bergers*) Soit f une application d'un ensemble fini, non vide E dans un ensemble fini, non vide F , telle que :

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall y \in F, |f^{-1}(\{y\})| = n,$$

alors,

$$|E| = n|F|.$$

Interprétation : Pour chaque élément y de F , on a n "choix possibles" dans E .

Preuve : Posons $|F| = p$. Il existe une bijection :

$$\begin{aligned} \varphi : \llbracket 1, p \rrbracket &\longrightarrow F \\ i &\longmapsto y_i \end{aligned}$$

On a alors :

$$E = \bigcup_{i=1}^p f^{-1}(\{y_i\}),$$

où les ensembles $f^{-1}(\{y_i\})$ sont deux à deux disjoints. On déduit alors du corollaire 1 que :

$$|E| = \sum_{i=1}^p |f^{-1}(\{y_i\})| = pn.$$

Corollaire 3 : Soit A et B des parties finies, quelconques d'un ensemble E . L'ensemble $A \cup B$ est fini et on a :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Preuve : Remarquons (à vérifier) que

$$A \cup B = B \cup (A \setminus B) \quad \text{et} \quad B \cap (A \setminus B) = \emptyset,$$

et que

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \quad \text{et} \quad (A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset.$$

De la première propriété et du principe d'addition, on déduit que $A \cup B$ est fini et que :

$$|A \cup B| = |B| + |A \setminus B|.$$

De la seconde propriété et du principe d'addition, on déduit que :

$$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|.$$

On obtient :

$$|A \cup B| = |B| + |A| - |A \cap B|.$$

Théorème 6.3 : (*Formule du crible ou principe d'inclusion-exclusion*)

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et soit (A_1, \dots, A_n) une famille finie de parties finies d'un ensemble E . L'ensemble $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est fini et on a :

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \alpha_i,$$

où, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, α_i est la somme des cardinaux des intersections de i des ensembles A_1, \dots, A_n .

Preuve par récurrence :

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, notons $\mathcal{R}(n)$ la proposition de l'énoncé. La proposition $\mathcal{R}(1)$ est trivialement vraie.

Supposons que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la proposition $\mathcal{R}(n)$ soit vraie et montrons que la proposition $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

D'après le corollaire 3 du théorème 6.2 (principe d'addition), on a :

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| = \left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup A_{n+1} \right| = \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap A_{n+1} \right|,$$

avec

$$\left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap A_{n+1} \right| = \left| \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1}) \right|.$$

Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, notons β_i la somme des cardinaux des intersections de i des ensembles $A_1 \cap A_{n+1}, \dots, A_n \cap A_{n+1}$, c'est-à-dire la somme des cardinaux des intersections, comportant A_{n+1} , de $i+1$ des ensembles A_1, \dots, A_n, A_{n+1} .

En appliquant la proposition $\mathcal{R}(n)$ à $|\bigcup_{i=1}^n A_i|$ et à $|\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})|$, on obtient, avec la notation de l'énoncé :

$$|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \alpha_i + |A_{n+1}| - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \beta_i.$$

Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, notons maintenant γ_i la somme des cardinaux des intersections de i des ensembles A_1, \dots, A_n, A_{n+1} . On a alors,

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \gamma_1 &= \alpha_1 + |A_{n+1}|, \\ \gamma_i &= \alpha_i + \beta_{i-1}, \\ \gamma_{n+1} &= \beta_n. \end{aligned}$$

Or, en posant $j = i + 1$, on a : $-\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \beta_i = \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{j-1} \beta_{j-1}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \alpha_i + |A_{n+1}| + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i-1} \beta_{i-1} \\ &= \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \gamma_i + \alpha_1 + |A_{n+1}| + (-1)^n \beta_n \\ &= \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \gamma_i + \gamma_1 + (-1)^n \gamma_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \gamma_i. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la proposition $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

Exemple : Dans le cas $n = 3$, on obtient :

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Remarquons que pour $n = 2$, on retrouve le corollaire 3 du théorème 6.2 :

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Théorème 6.4 : (*Principe de multiplication*)

Soit E et F des ensembles finis, non vides, $E \times F$ est fini et on a :

$$|E \times F| = |E| |F|.$$

Preuve : Par définition,

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Posons $|E| = n$ et $|F| = p$. Il existe une bijection :

$$\begin{aligned} \varphi : \llbracket 1, n \rrbracket &\longrightarrow E \\ i &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, notons :

$$F_i = \{(x_i, y) \mid y \in F\},$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_i : F &\longrightarrow F_i \\ y &\longmapsto (x_i, y) \end{aligned}$$

Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'application φ_i est bijective (à vérifier), donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |F_i| = |F| = p.$$

D'autre part, $E \times F = \bigcup_{i=1}^n F_i$, avec, pour $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \emptyset$. D'après le corollaire 1 du théorème 6.2 (principe d'addition), on a :

$$|E \times F| = \sum_{i=1}^n |F_i| = np.$$

Corollaire : Soit (E_1, \dots, E_p) une p -liste de sous-ensembles non vides d'un ensemble fini E . L'ensemble $E_1 \times \dots \times E_p$ est fini et on a :

$$|E_1 \times \dots \times E_p| = |E_1| \cdots |E_p|.$$

En particulier, si E est un ensemble fini, pour tout entier p strictement positif, $|E^p|$ est fini et on a :

$$|E^p| = |E|^p.$$

La preuve, par récurrence, est laissée au lecteur.

Notation : Soit E et F des ensembles non vides, l'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E .

Théorème 6.5 : Le nombre d'applications d'un ensemble fini, non vide, de cardinal p dans un ensemble fini, non vide, de cardinal n est n^p , c'est-à-dire :

$$|\mathcal{F}(E, F)| = |F|^{|E|}.$$

Preuve :

Étudions tout d'abord le cas particulier : $E = \llbracket 1, p \rrbracket$.

Rappelons qu'une p -liste de F est, par définition, une application de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans F et que l'ensemble des p -listes de F est le produit cartésien F^p (définition 2.3). Or, $|F^p| = |F|^p$. Le cardinal de l'ensemble des applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans F est donc $|F|^p$.

Dans le cas général, il existe une bijection

$$\varphi : \llbracket 1, p \rrbracket \longrightarrow E$$

et l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\llbracket 1, p \rrbracket, F) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E, F) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

est bijective (à vérifier). On en déduit

$$|\mathcal{F}(E, F)| = |\mathcal{F}(\llbracket 1, p \rrbracket, F)| = |F|^{|E|}.$$

Exemple : Le nombre de mots de 8 lettres formés avec l'alphabet usuel, comportant 26 lettres est le nombre de 8-listes de l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet, c'est-à-dire $26^8 = 208\,827\,064\,576$.

Théorème 6.6 : Le nombre de parties d'un ensemble fini de cardinal n est 2^n , c'est-à-dire :

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

Preuve :

Dans le cas où $E = \emptyset$, l'ensemble E est de cardinal 0 et on a : $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$, de cardinal 1.

Dans le cas où E est non vide, pour toute partie A de E , considérons l'application :

$$\varphi_A : E \longrightarrow \{0,1\},$$

définie par :

$$\begin{aligned} \text{si } x \in A, & \quad \varphi_A(x) = 1, \\ \text{si } x \notin A, & \quad \varphi_A(x) = 0. \end{aligned}$$

L'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto \varphi_A \end{aligned}$$

est bijective (à vérifier).

On en déduit :

$$|\mathcal{P}(E)| = |\mathcal{F}(E, \{0,1\})| = |\{0,1\}|^{|E|} = 2^{|E|}.$$

Théorème 6.7 : Soit n et p des entiers strictement positifs.

Le nombre d'applications injectives d'un ensemble fini, non vide, E , de cardinal p , dans un ensemble fini, non vide, F , de cardinal n , ne dépend que de n et p , est fini et est noté $A(n,p)$ et on a :

$$\begin{aligned} \text{si } n < p, & \quad A(n,p) = 0, \\ \text{si } p \leq n, & \quad A(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

Preuve : On peut, comme dans le calcul de $|\mathcal{F}(E,F)|$, se ramener au cas où $E = \llbracket 1,p \rrbracket$.

Soit F un ensemble fixé, de cardinal n strictement positif. Il existe une bijection :

$$\begin{aligned} \varphi : \llbracket 1,p \rrbracket & \longrightarrow F \\ i & \longmapsto a_i \end{aligned}$$

Notons alors $I_p(F)$ l'ensemble des applications injectives de $\llbracket 1,p \rrbracket$ dans F . On cherche à calculer $|I_p(F)|$.

Si $n < p$, d'après le principe des tiroirs (corollaire 7 du théorème 5.2), aucune application de E dans F n'est injective, donc $|I_p(F)| = 0$.

Si $p \leq n$, l'application :

$$\begin{aligned} \llbracket 1,p \rrbracket & \longrightarrow F \\ i & \longmapsto a_i \end{aligned}$$

est injective, donc $I_p(F)$ est non vide.

Nous allons faire un raisonnement par récurrence.

Pour tout entier p strictement positif, soit \mathcal{H}_p la proposition suivante:

$$\mathcal{H}_p \quad \begin{array}{l} \text{pour } 1 \leq p \leq n, \quad |I_p(F)| = \frac{n!}{(n-p)!}, \\ \text{pour } p > n, \quad |I_p(F)| = 0. \end{array}$$

Si $p = 1$, $E = \{1\}$ et toute application de E dans F est injective. Or, le nombre d'applications de $\{1\}$ dans F est $|F| = n$. D'autre part, dans le cas $p = 1$, on a : $1 \leq p \leq n$ et $\frac{n!}{(n-1)!} = n$.

La proposition \mathcal{H}_1 est donc vraie.

Soit maintenant p un entier strictement positif. Supposons que la proposition \mathcal{H}_p soit vraie et montrons que la proposition \mathcal{H}_{p+1} est vraie.

Si $p + 1 > n$, on a déjà montré que $|I_{p+1}(F)| = 0$.

Si $p + 1 \leq n$, on a vu que $I_{p+1}(F)$ est non vide. Soit alors f une injection de $\llbracket 1, p+1 \rrbracket$ dans F et soit \tilde{f} l'application :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f} : & \llbracket 1, p \rrbracket & \longrightarrow F \\ & i & \longmapsto f(i) \end{array}$$

L'application \tilde{f} est injective, ce qui permet de définir une application :

$$\begin{array}{ccc} \psi : & I_{p+1}(F) & \longrightarrow I_p(F) \\ & f & \longmapsto \tilde{f} \end{array}$$

Pour tout g de $I_p(F)$, toute application f de $I_{p+1}(F)$, telle que $\psi(f) = g$ est déterminée par la donnée de $f(p+1)$ appartenant à l'ensemble $F \setminus \{g(1), \dots, g(p)\}$, qui est de cardinal $n - p$. On en déduit que :

$$\forall g \in I_p(F), |\psi^{-1}(\{g\})| = n - p \geq 1.$$

D'après le principe des bergers (corollaire 2 du théorème 6.2), on a alors, en utilisant la proposition \mathcal{H}_p ,

$$|I_{p+1}(F)| = (n - p)|I_p(F)| = (n - p) \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p-1)!}.$$

Définition 6.8 : Pour tout entier p strictement positif, une injection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans un ensemble fini, non vide, F est une p -liste (a_1, \dots, a_p) d'éléments *distincts* de F . On l'appelle p -arrangement des éléments de F . Le nombre de p -arrangements de n éléments est donc $A(n, p)$.

Remarque : Dans certains ouvrages, une p -liste est appelée p -arrangement *avec répétition* et un p -arrangement est appelée p -arrangement *sans répétition*.

Exemple : Soit $F = \{a, b, c, d\}$ un ensemble de cardinal 4. La suite (a, d, c) est à la fois une 3-liste et un 3-arrangement des éléments de F , mais la suite (a, d, a) est une 3-liste et n'est pas un 3-arrangement des éléments de F .

Définition 6.9 : Une bijection d'un ensemble fini E dans lui-même est appelée *permutation* de E .

Notations :

L'ensemble des permutations d'un ensemble E est noté $\mathcal{S}(E)$.

Pour tout entier n strictement positif, l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est noté \mathcal{S}_n .

Théorème 6.10 : Le nombre des bijections d'un ensemble fini E de cardinal n , strictement positif, dans lui-même est $n!$, en particulier :

$$|\mathcal{S}_n| = n!.$$

Preuve : L'ensemble E étant fini, toute application injective de E dans lui-même est bijective (corollaire 4 du théorème 5.2). Le nombre des bijections de E est donc :

$$A(n, n) = \frac{n!}{(n - n)!} = n!.$$

Définition 6.11 : Soit n et p des entiers positifs ou nuls et soit E un ensemble de cardinal n . Une partie à p éléments de E est appelée p -combinaison des n éléments de E .

Notations :

On note $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des p -combinaisons de E . Cet ensemble est inclus dans $\mathcal{P}(E)$, donc est fini.

Théorème 6.12 : Pour $|E| = n \geq 0$, et $p \geq 0$, le cardinal de $\mathcal{P}_p(E)$ ne dépend que de n et p et est noté \mathcal{C}_n^p ou $\binom{n}{p}$.

On a alors :

$$\text{pour } 0 \leq p \leq n, \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

$$\text{pour } 0 \leq n < p, \quad \binom{n}{p} = 0.$$

Preuve :

Soit E un ensemble de cardinal n et soit F un sous-ensemble de E , on a $|F| \leq |E|$. On en déduit que pour $0 \leq n < p$, il n'y a aucune p -combinaison de n éléments et $\binom{n}{p} = 0$.

Supposons maintenant $1 \leq p \leq n$ et notons $I_p(E)$ l'ensemble des p -arrangements des n éléments de E . D'après le théorème 6.7, on a :

$$|I_p(E)| = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Soit (a_1, \dots, a_p) un p -arrangement des n éléments de E . Les éléments a_1, \dots, a_p sont distincts, donc l'ensemble $\{a_1, \dots, a_p\}$ est de cardinal p et est une p -combinaison des n éléments de E . Soit alors l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad I_p(E) &\longrightarrow \mathcal{P}_p(E) \\ (a_1, \dots, a_p) &\longmapsto \{a_1, \dots, a_p\} \end{aligned}$$

Pour tout élément F de $\mathcal{P}_p(E)$, on a :

$$\varphi(a_1, \dots, a_p) = F \iff (a_1, \dots, a_p) \text{ est un } p\text{-arrangement des éléments de } F.$$

Or, l'ensemble F étant de cardinal p , le nombre des p -arrangements de F est $p!$.

On en déduit :

$$\forall F \in \mathcal{P}_p(E), |\varphi^{-1}(F)| = p!,$$

d'où, d'après le principe des bergers (corollaire 2 du théorème 6.2),

$$|I_p(E)| = p!|\mathcal{P}_p(E)|,$$

et

$$\binom{n}{p} = |\mathcal{P}_p(E)| = \frac{|I_p(E)|}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Etudions enfin le cas $p = 0$. Pour tout ensemble fini E , de cardinal n positif ou nul, l'ensemble vide est l'unique sous-ensemble de E de cardinal nul. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!(n-0)!}.$$

Théorème 6.13 : Pour (n, p) appartenant à $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Preuve : Soit E un ensemble de cardinal n strictement positif. Cet ensemble est non vide. Fixons un élément a dans E . L'ensemble des parties à p éléments de E est réunion disjointe de l'ensemble X des parties à p éléments de E contenant a et de l'ensemble Y des parties à p éléments de E ne contenant pas a . On en déduit :

$$\binom{n}{p} = |X| + |Y|.$$

Or Y est l'ensemble des parties à p éléments de $E \setminus \{a\}$, donc,

$$|Y| = \binom{n-1}{p}.$$

Notons maintenant Z l'ensemble des parties à $p-1$ éléments de $E \setminus \{a\}$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Z \\ F & \longmapsto & F \setminus \{a\} \end{array}$$

est bijective (à vérifier). On en déduit :

$$|X| = |Z| = \binom{n-1}{p-1}.$$

Remarque : On peut aussi faire une autre démonstration (moins bonne) en utilisant les formules du théorème 6.12.

Interprétation: (*Triangle de Pascal*)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \cdots & & \\
 & & \vdots & & & & \ddots \\
 & \binom{n-1}{0} & \cdots & \binom{n-1}{p-1} & \binom{n-1}{p} & & \\
 & \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n}{p} & \cdots & \binom{n}{n} &
 \end{array}$$

Théorème et définition 6.14: (*Formule du binôme de Newton*)

Soit a et b des éléments d'un anneau *commutatif* unitaire. Pour tout entier n de \mathbb{N} ,

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

Les entiers $\binom{n}{p}$ sont appelés *coefficients binômiaux*.

La preuve sera vue en T.D.

Définition 6.15: Un *dérangement* de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$, telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(i) \neq i.$$

Théorème 6.16: (*Exercice*)

Le nombre de dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est

$$n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Preuve: Notons d_n le nombre de dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et a_n le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, qui ne sont pas des dérangements. On a :

$$d_n = n! - a_n.$$

Pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, notons :

$$A_k = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma(k) = k\}.$$

Avec les notations de la formule du crible (théorème 6.3), on a :

$$a_n = |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \alpha_i,$$

où, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, α_i est la somme des cardinaux des intersections de i des ensembles A_1, \dots, A_n , c'est-à-dire le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, ayant exactement i points fixes.

Soit X un sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$, de cardinal i . Le nombre des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, admettant tout élément de X comme point fixe est $(n - i)!$. Or, le nombre de sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$, de cardinal i est $\binom{n}{i}$. D'après le principe des bergers (corollaire 2 du théorème 6.2), on obtient :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i = \binom{n}{i} (n - i)! = \frac{n!}{i!}.$$

D'où,

$$d_n = n! - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{n!}{i!} = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Théorème 6.17 : Soit E un ensemble non vide, de cardinal n , soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et soit $\{n_1, \dots, n_k\}$ un ensemble d'entiers positifs ou nuls, de somme n .

On note $\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$ le nombre de k -listes (A_1, \dots, A_k) de $\mathcal{P}(E)$, telles que,

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, |A_i| &= n_i, \\ \bigcup_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} A_i &= E, \end{aligned}$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, k \rrbracket, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

On a alors :

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}.$$

Admis.

Remarque : Pour $k = 2$, on retrouve les coefficients binômiaux :

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}.$$

Corollaire : Soit x_1, \dots, x_k des éléments d'un anneau commutatif unitaire. Pour tout entier positif n , on a :

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}.$$

CHAPITRE II

THÉORIE DES GRAPHES

§1. Graphes simples

Définition 1.1 : Un *graphe simple* est un couple $G = (V(G), E(G))$, ou plus simplement $G = (V, E)$, où V est un ensemble fini non vide et où E est un sous-ensemble de $\mathcal{P}_2(V)$, ensemble des parties à deux éléments de V .

Remarque : L'ensemble V est supposé non vide, mais l'ensemble E peut être éventuellement vide.

Définitions 1.2 : Les éléments de V sont appelés *sommets*. Les éléments de E , s'il en existe, sont appelés *arêtes*.

Soit $e = \{u, v\}$ une arête de G . On dit que les sommets u et v sont *reliés* et sont les *extrémités* de l'arête e . On dit aussi que les sommets u et v sont *adjacents* ou *voisins* et que l'arête e est *incidente* aux sommets u et v .

Un sommet, qui n'admet aucun voisin, est dit *isolé*.

Le cardinal de V est appelé *ordre* du graphe G .

Le nombre des arêtes incidentes à un sommet v de G est appelé *degré* de v et noté $d(v)$.

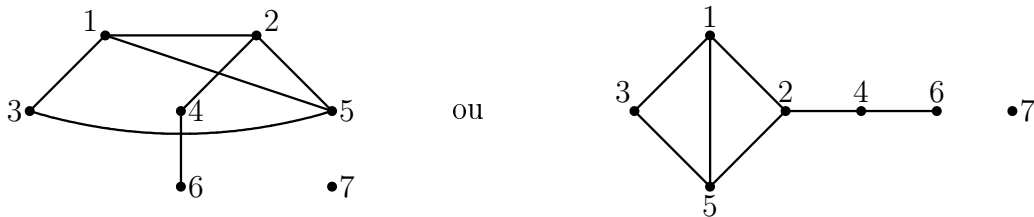
Le *degré minimum* de G est : $\delta(G) = \min \{d(v) \mid v \in V\}$.

Le *degré maximum* de G est : $\Delta(G) = \max \{d(v) \mid v \in V\}$.

Représentation sur un exemple :

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}.$$



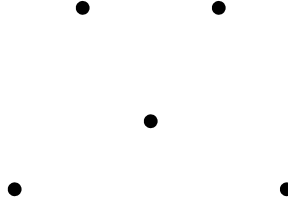
Propriété 1.3 : Si $|V| = n$ et $|E| = m$, $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

En effet, E est un sous-ensemble de $\mathcal{P}_2(V)$, de cardinal $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exemples classiques 1.4 :

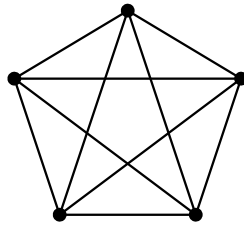
1) Si $|V| = n$ et si E est vide, on dit que G est un n -stable.

5-stable :



2) Si $|V| = n$ et si $E = \mathcal{P}_2(V)$, on dit que G est un *graphe complet d'ordre n* (ou une n -clique), noté K_n .

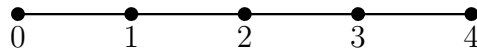
5-clique :



3) Si $V = \llbracket 0, n \rrbracket$ et si $E = \{\{i, i+1\} \mid i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$, on dit que G est une n -chaîne notée P_n ou *chaîne de longueur n* .

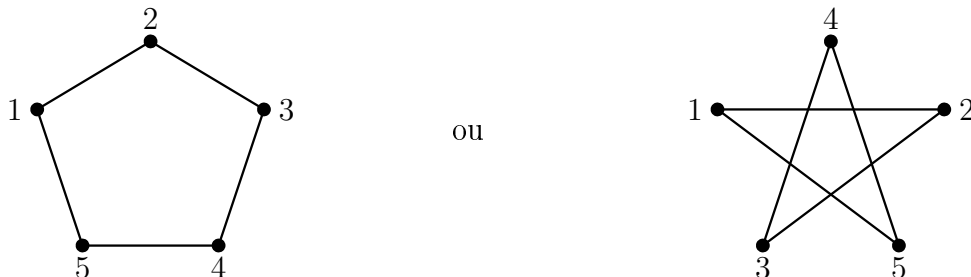
Par convention, on dira qu'un sommet isolé est une 0-chaîne.

4-chaîne :



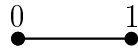
4) Pour $n \geq 3$, si $V = \llbracket 1, n \rrbracket$ et si $E = \{\{i, i+1\} \mid i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\} \cup \{n, 1\}$, on dit que G est un n -cycle noté C_n ou *cycle de longueur n* .

5-cycle :

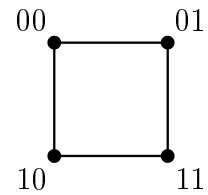


5) Si V est l'ensemble des nombres de k chiffres formés avec les chiffres 0 et 1 (c'est-à-dire l'ensemble des k -listes de $\{0,1\}$) et si deux sommets sont reliés, s'ils diffèrent d'exactly un chiffre, on dit que G est un k -cube.

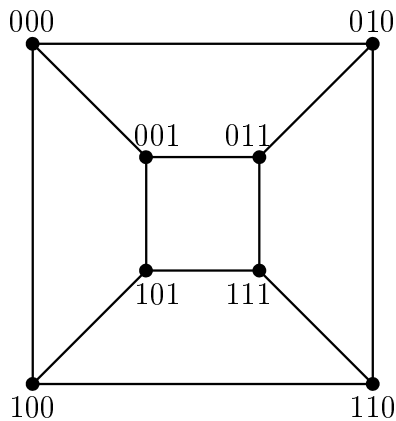
1-cube :



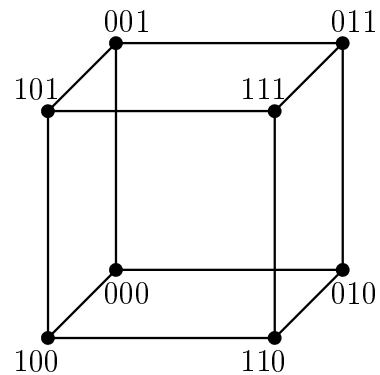
2-cube :



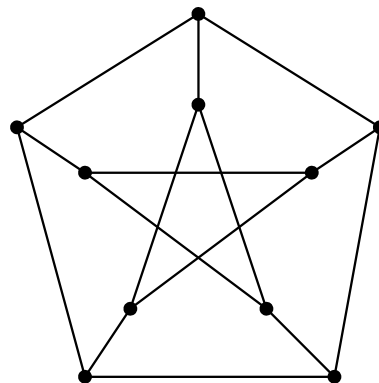
3-cube :



ou



6) *Graphe de Petersen* :



Définition 1.5 : Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On appelle *graphe complémentaire* de G , le graphe $\overline{G} = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$.

Exemples : Le n -stable et la n -clique sont complémentaires.

Le complémentaire du 5-cycle est un 5-cycle. On dit que le 5-cycle est *auto-complémentaire* (voir la définition 2.4).

Définition 1.6 : Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et soit W une partie non vide de V . On appelle *sous-graphe de G , engendré par l'ensemble W* , le graphe $G_W = (W, F)$, dont l'ensemble des sommets est W et dont l'ensemble des arêtes est l'ensemble F des arêtes est obtenu, à partir de E , en supprimant toutes les arêtes incidents aux sommets de $V \setminus W$. On dit alors que le graphe G contient le graphe G_W .

Théorème 1.7 (Théorème de Turán) :

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et soit $G = (V, E)$ un graphe simple, d'ordre n , ne contenant pas de p -clique. Alors, si m est le nombre d'arêtes de G , on a :

$$m \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Preuve : Soit p un entier supérieur ou égal à 2, fixé. Montrons par récurrence, que, tout graphe simple $G = (V, E)$, d'ordre n , ne contenant pas de p -clique, a un nombre d'arêtes inférieur ou égal à $\left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}$.

Pour $n = 1$, le résultat est trivial.

Supposons donc que n est supérieur ou égal à 2 et que tout graphe d'ordre n' strictement inférieur à n , sans p -clique, a un nombre d'arêtes m' inférieur ou égal à $\left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n'^2}{2}$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n , ne contenant pas de p -clique.

1er cas : $n < p$

On a alors : $p \geq n + 1$, $\frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{n}$, $1 - \frac{1}{p-1} \geq \frac{n-1}{n}$ et

$$\left(\frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2} \geq m.$$

2ème cas : $n \geq p$

Le graphe G est distinct de la n -clique, donc E est distinct de $\mathcal{P}_2(V)$. Notons alors :

$$E \setminus \mathcal{P}_2(V) = \{e_1, \dots, e_k\}$$

et posons :

$$G_0 = G, \text{ et } \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, G_j = (V, E \cup \{e_1, \dots, e_j\}).$$

Le graphe G_0 ne contient pas de p -clique, le graphe G_k est la n -clique, donc contient une p -clique. On en déduit que l'ensemble :

$$\{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \mid G_j \text{ ne contient pas de } p\text{-clique}\}$$

est un ensemble d'entiers, non vide, majoré, donc admet un plus grand élément q . Le graphe G_{q+1} contient donc une p -clique. Le graphe G_q ne contient pas

de p -clique et est obtenu, à partir de G_{q+1} , par suppression d'une arête. Cette arête appartient donc à la p -clique de G_{q+1} , donc G_q contient une $(p-1)$ -clique, que nous noterons H . Notons H' le sous-graphe engendré par l'ensemble $V(G_q) \setminus V(H)$. Notons enfin $E(H, H')$ l'ensemble des arêtes de G_q ayant une extrémité dans H et une extrémité dans H' . On a :

$$m = |E(G)| \leq |E(G_q)| = |E(H)| + |E(H')| + |E(H, H')|.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $|E(H')| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{(n-p+1)^2}{2}$.

D'autre part, $|E(H)| = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$.

Enfin, G_q ne contenant pas de p -clique, tout sommet de H' est adjacent à, au plus, $p-2$ sommets de H . On en déduit : $|E(H, H')| \leq (p-2)(n-p+1)$. On obtient :

$$m \leq \frac{(p-1)(p-2)}{2} + \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{(n-p+1)^2}{2} + (p-2)(n-p+1)$$

et en remarquant que : $1 - \frac{1}{p-1} = \frac{p-2}{p-1}$,

$$m \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \left((p-1)^2 + (n-p+1)^2 + 2(p-1)(n-p+1)\right) = \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Exemples : Pour $p = 2$, on obtient $m = 0$.

Pour $p = 3$, c'est-à-dire, si le graphe est sans K_3 (triangle), on obtient $m \leq \frac{n^2}{4}$. Dans le cas particulier où G est le graphe multipartite complet $K_{q,q}$, on a $n = 2q$ et $m = q^2 = \frac{n^2}{4}$.

§2. Multigraphes

Définitions 2.1 : Un *multigraphe* est un couple $G = (V(G), E(G))$ ou, plus simplement, $G = (V, E)$, où V est un ensemble fini non vide, où E est un ensemble fini, éventuellement vide, muni, dans le cas où il est non vide, d'une application

$$\varphi : E \longrightarrow \mathcal{P}_2(V) \cup \mathcal{P}_1(V),$$

avec $\mathcal{P}_2(V)$ ensemble des parties à deux éléments de V et $\mathcal{P}_1(V)$ ensemble des parties à un élément de V .

Les éléments de V sont appelés *sommets*, les éléments de E sont appelés *arêtes*. Le cardinal de V est appelé *ordre du multigraphe* G .

Si $\varphi(e) = \{u, v\}$, on dit que u et v sont les *extrémités* de l'arête e , que les sommets u et v sont *adjacents* ou *voisins* et que l'arête e est *incidente* aux sommets u et v .

Soit u et v deux sommets distincts de G ,

si $|\varphi^{-1}(\{u, v\})| = 1$, on dit que $\varphi^{-1}(\{u, v\})$ est une *arête simple*,

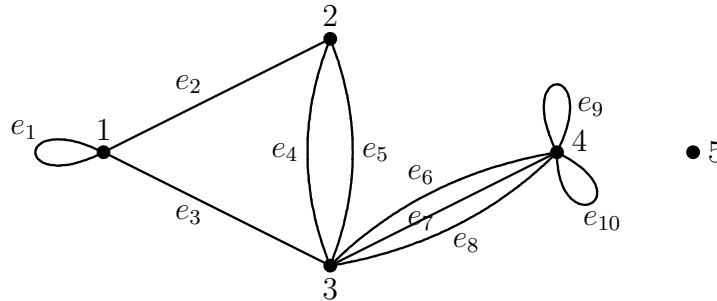
si $|\varphi^{-1}(\{u, v\})| \geq 2$, on dit que $\varphi^{-1}(\{u, v\})$ est une *arête multiple*.

Une *boucle* est une arête e telle que $\varphi(e)$ appartienne à $\mathcal{P}_1(V)$. Dans ce cas, si $\{u\} = \varphi(e)$, on dit encore que e est *incidente* à v et si $|\varphi^{-1}(u)| \geq 2$, on dit que $\varphi^{-1}(u)$ est une *boucle multiple*.

Un sommet qui n'admet aucune arête incidente est dit *isolé*.

On appelle *graphe simple associé* au multigraphe $G = (V, E)$, le graphe simple $G' = (V, E')$, où $E' = \varphi(E) \setminus \mathcal{P}_1(V)$.

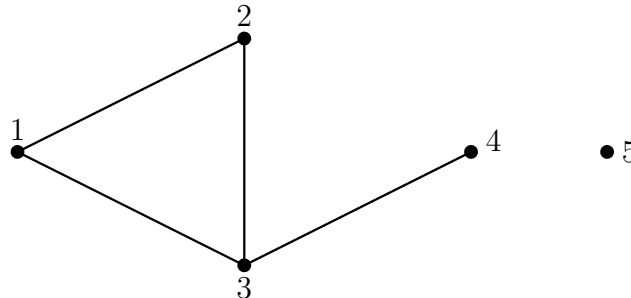
Exemple 2.2 :



Dans cet exemple :

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$,
 $\varphi(e_1) = \{1\}$, $\varphi(e_2) = \{1, 2\}$, $\varphi(e_3) = \{1, 3\}$, $\varphi(e_4) = \varphi(e_5) = \{2, 3\}$,
 $\varphi(e_6) = \varphi(e_7) = \varphi(e_8) = \{3, 4\}$, $\varphi(e_9) = \varphi(e_{10}) = \{4\}$.
 e_1, e_9, e_{10} sont des boucles,
 e_2 et e_3 sont des arêtes simples,
 $\{e_4, e_5\}$ et $\{e_6, e_7, e_8\}$ sont des arêtes multiples.
 $\{e_9, e_{10}\}$ est une boucle multiple.
 Le sommet 5 est isolé.

Le graphe simple associé au multigraphe de l'exemple 2.2 est :



Cas particulier : Un multigraphe $G = (V, E)$ est un graphe simple, si et seulement s'il n'admet ni arête multiple, ni boucle.

Dans ce cas, l'application φ est injective, d'image incluse dans $\mathcal{P}_2(V)$ et, on identifie e , élément de E , et $\varphi(e)$, élément de $\mathcal{P}_2(V)$.

Définition 2.3 : Soit $G = (V,E)$ et $H = (W,F)$ des multigraphes. On dit que G et H sont *isomorphes* s'il existe des bijections:

$$f : V \longrightarrow W \text{ et } g : E \longrightarrow F,$$

telles que l'arête e soit incidente au sommet u dans G , si et seulement si l'arête $g(e)$ est incidente au sommet $f(u)$ dans H .

Interprétation : Les multigraphes G et H sont isomorphes, si et seulement si les applications f et g préservent l'incidence.

Cas des graphes simples :

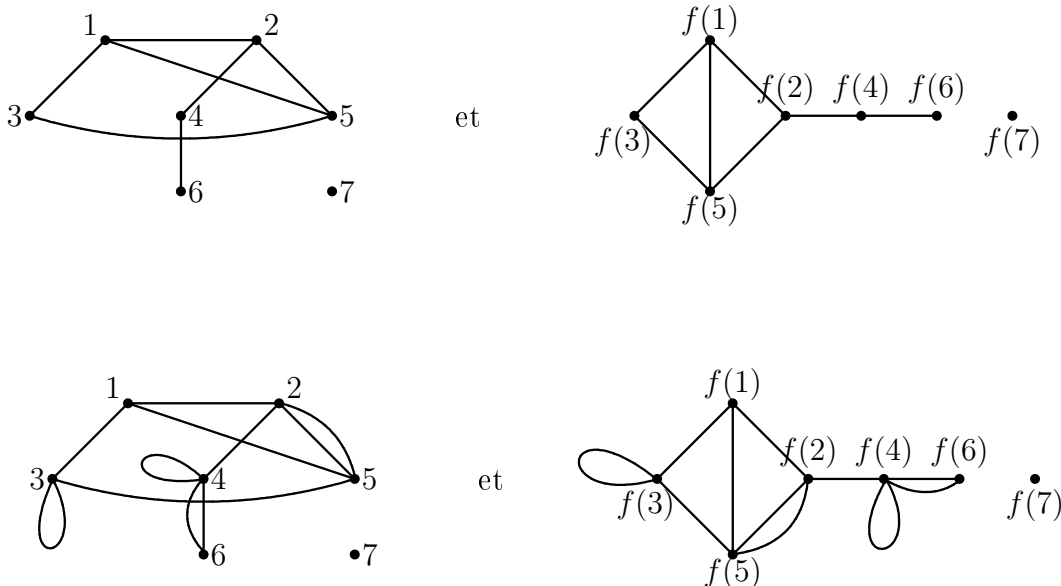
$$\forall e \in E, e = \{u,v\} \iff g(e) = \{f(u),f(v)\}.$$

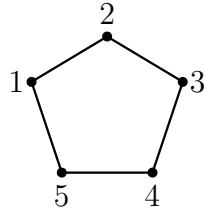
Dans ce cas, l'application g est entièrement déterminée par la donnée de f et on peut définir l'isomorphisme par : $f : V \longrightarrow W$ et la propriété :

$$\forall (u,v) \in V \times V, u \text{ et } v \text{ adjacents dans } G \iff f(u) \text{ et } f(v) \text{ adjacents dans } H.$$

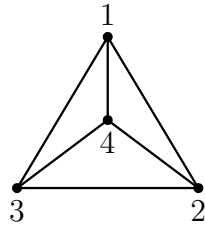
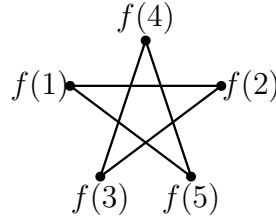
Donc, les graphes simples G et H sont isomorphes, si et seulement s'il existe une application : $f : V \longrightarrow W$, qui préserve l'adjacence.

Exemples :

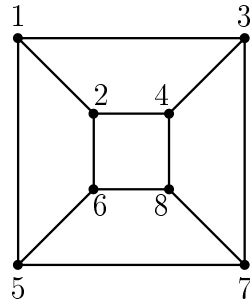
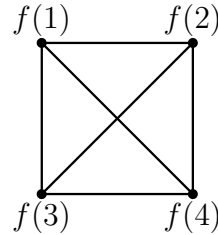




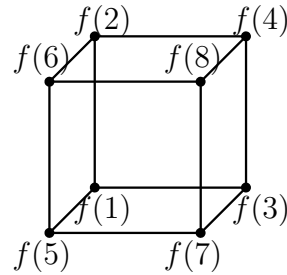
et



et



et



Définition 2.4 : Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On dit que G est *auto-complémentaire* s'il est isomorphe à son complémentaire $\bar{G} = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$.

Exemples : Le 5-cycle et la 4-chaîne sont des graphes auto-complémentaires.

Définition 2.5 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe. Pour tout sommet v de G , le *degré* de v , noté $d(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes au sommet v , en comptant deux fois chaque boucle.

Le *degré minimum* de G est : $\delta(G) = \min \{d(v) \mid v \in V\}$.

Le *degré maximum* de G est : $\Delta(G) = \max \{d(v) \mid v \in V\}$.

Définition 2.6 : Soit k un entier positif ou nul, on dit qu'un multigraphe G est *k -régulier*, si, pour tout sommet v , on a $d(v) = k$.

Exemples :

Le n -cycle C_n est un graphe 2-régulier.

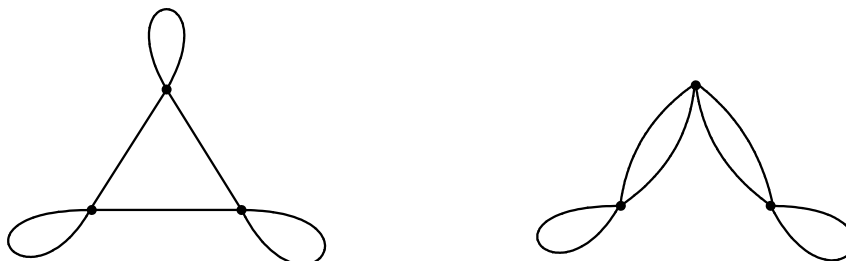
La n -clique K_n est un graphe $(n - 1)$ -régulier.

Le k -cube est un graphe k -régulier.

Le graphe de Petersen est un graphe 3-régulier.

La n -chaîne n'est un graphe régulier que pour $n = 1$.

Les deux multigraphes suivants sont 4-régulier :



Le graphe simple associé au premier est 2-régulier. Le graphe simple associé au deuxième n'est pas régulier.

§3. Matrices associées à un multigraphe

Notations : Soit G un multigraphe d'ordre n . Soit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ l'ensemble des sommets de G et soit $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, de cardinal m , l'ensemble des arêtes de G .

Définition 3.1 : On appelle *matrice d'adjacence* de G la matrice (n,n) , A , de terme général a_{ij} où,

pour $i \neq j$, a_{ij} est le nombre d'arêtes incidentes à la fois à v_i et à v_j ,
pour tout i , a_{ii} est le nombre de boucles incidentes à v_i .

Propriétés 3.2 :

La matrice A est symétrique.

La somme des éléments de la i -ème ligne de A , qui est égale à la somme des éléments de la i -ème colonne de A , est le nombre d'arêtes (y compris les boucles) incidentes au sommet v_i . S'il n'y a pas de boucle incidente à v_i , c'est le degré de v_i .

La trace de A est le nombre de boucles de G .

Dans l'exemple 2.2,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.3 : La *matrice d'incidence* de G est la matrice (n,m) , M , de terme général m_{ij} où,

$m_{ij} = 1$, si l'arête e_j est incidente au sommet v_i et n'est pas une boucle,
 $m_{ij} = 2$, si e_j est une boucle incidente au sommet v_i ,
 $m_{ij} = 0$, dans les autres cas.

Propriétés 3.4 : La somme des éléments de la i -ème ligne de M est le degré du sommet v_i .

La somme des éléments de chaque colonne de M est égale à 2.

Dans l'exemple 2.2,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.5 : Avec les notations précédentes,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

Preuve : On compte, de deux façons différentes, la somme des éléments de la matrice M :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} m_{ij} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m m_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{v \in V} d(v) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n m_{ij} \right) = 2m. \end{aligned}$$

Autre preuve (n'utilisant pas la matrice d'incidence) :

En faisant la somme des degrés des sommets, on fait la somme des nombres d'arêtes incidentes à chacun de sommets (en comptant deux fois chaque boucle). Chaque arête, qui n'est pas une boucle, est aussi comptée deux fois, avec chacun de ses deux sommets extrémités.

Corollaire : Dans un multigraphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Preuve : Notons V_1 l'ensemble des sommets de G de degré impair et V_2 l'ensemble des sommets de G de degré pair. On a :

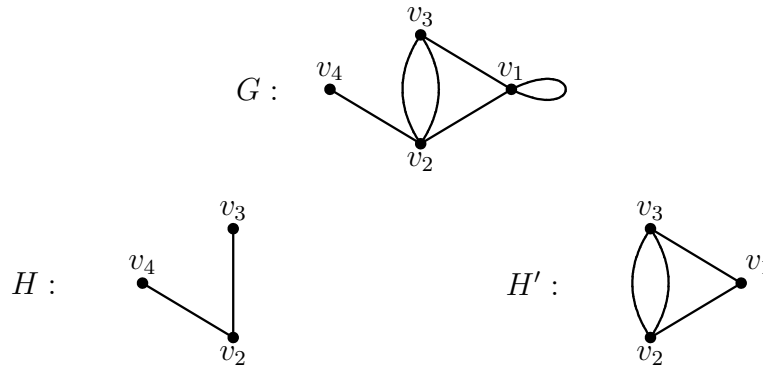
$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v).$$

Or, $\sum_{v \in V} d(v)$ et $\sum_{v \in V_2} d(v)$ étant pairs, il en est de même de $\sum_{v \in V_1} d(v)$, qui est une somme d'entiers impairs. On en déduit $|V_1|$ pair.

§4. Sous-graphes. Graphes couvrants

Définition 4.1 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe. On appelle *sous-graphe* de G , tout multigraphe $H = (W, F)$, où W est un sous-ensemble non vide de V et où F est un sous-ensemble de E , tel que les extrémités de tout élément de F appartiennent à W .

Exemples : Les multigraphes H et H' sont des sous-graphes du multigraphe G :



Définition 4.2 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe et soit W un sous-ensemble non vide de V . Le *sous-graphe engendré par W* est le multigraphe $G_W = (W, F)$, où F est l'ensemble obtenu à partir de E , en supprimant toutes les arêtes incidentes aux sommets de $V \setminus W$.

Exemple : Si G est le multigraphe de l'exemple 4.1, les multigraphes suivants sont les sous-graphes de G , engendrés respectivement par les ensembles $\{v_2, v_3, v_4\}$ et $\{v_3, v_4\}$.



Définition 4.3 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe. Un *graphe couvrant* de G est un sous-graphe de G , ayant le même ensemble de sommets que G .

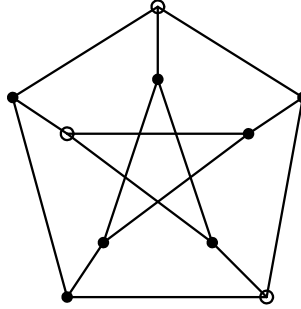
Exemples : Si G est le multigraphe de l'exemple 4.1, les multigraphes suivants sont des graphes couvrants de G :



§5. Coloration d'un graphe

Définition 5.1 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe. On dit qu'une partie W de V est un *stable* de G , si le sous-graphe engendré par W est un graphe stable.

Exemple : L'ensemble des sommets marqués \circ est un stable du graphe de Petersen suivant :



Définition 5.2 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe et soit k un entier strictement positif. On dit que G est *k -parti* (ou *multiparti*) s'il existe une partition de V en $V_1 \cup \dots \cup V_k$, telle que, pour tout i appartenant à $\llbracket 1, k \rrbracket$, l'ensemble V_i soit stable.

Le graphe G sera alors noté $G = (V_1, \dots, V_k, E)$.

Rappelons que, par définition d'une partition, les ensembles V_i sont tous non vides.

Pour $k = 2$, on dit qu'un multigraphe 2-parti est *biparti*.

Remarque : Si G est un multigraphe k -parti, d'ordre n , on a $k \leq n$ et, pour tout h appartenant à $\llbracket k, n \rrbracket$, G est *h -biparti*.

Exemples de multigraphe biparti et de multigraphe 3-parti :



Remarque : Un multigraphe multiparti n'admet pas de boucle.

Autres exemples :

Tout cycle pair est biparti.

Tout cycle impair est 3-parti.

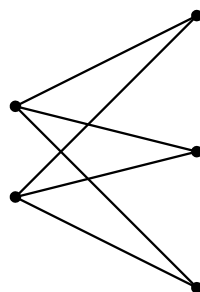
Les multigraphes 1-partis sont les stables.

Définition 5.3 : Avec les notations précédentes, si $G = (V, E)$ est un graphe simple k -parti, tel que $E = \mathcal{P}_2(V) \setminus \bigcup_{i=1}^k \mathcal{P}_2(V_i)$, on dit que G est *multiparti complet*.

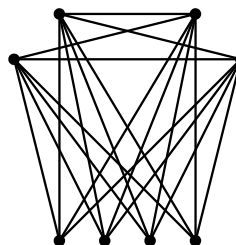
Notation : Soit G un graphe k -parti complet tel que, pour tout i appartenant à $\llbracket 1, k \rrbracket$, V_i soit de cardinal n_i , on note $G = K_{n_1, \dots, n_k}$.

Exemples :

$K_{2,3}$:



$K_{2,2,4}$:



Définition 5.4 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe *sans boucle* et soit k un entier strictement positif. Une k -coloration des sommets de G est une application

$$g : V \longrightarrow \llbracket 1, k \rrbracket,$$

telle que, si u et v sont des sommets (distincts), adjacents, on ait $g(u)$ distinct de $g(v)$.

Un multigraphe, sans boucle, admettant une k -coloration des sommets est dit *k -colorable*.

Dans ce cas, si $g(u) = i$, on dit que le sommet u est *colorié* en i .

Interprétation : Pour tout élément i de $\llbracket 1, k \rrbracket$, l'ensemble $g^{-1}(\{i\})$ des sommets de G coloriés en i est un stable de G ou est vide.

Remarque 1 : L'ensemble des k -colorations d'un multigraphe est égal à l'ensemble des k -colorations du graphe simple associé.

Dans la suite du paragraphe, on ne considère donc que des graphes simples

Remarque 2 : Un graphe simple est k -parti, si et seulement s'il admet une k -coloration g *surjective*, c'est-à-dire telle que, pour tout i de $\llbracket 1, k \rrbracket$, l'ensemble $V_i = g^{-1}(\{i\})$ soit non vide.

Remarque 3 : Tout graphe simple G , d'ordre n , est n -colorable. L'ensemble des entiers strictement positifs k tels que G soit k -colorable est donc non vide et admet un plus petit élément.

Définition 5.5 : Soit G un graphe simple. Le plus petit entier k tel que G soit k -colorable est appelé *nombre chromatique* de G et est noté $\gamma(G)$.

Exemples :

Le nombre chromatique d'un graphe stable est 1.

Le nombre chromatique d'une chaîne est 2.

Le nombre chromatique d'un cycle pair est 2.

Le nombre chromatique d'un cycle impair est 3.

Le nombre chromatique du graphe de Petersen est 3.

Le nombre chromatique de la clique K_n est n .

La vérification est laissée au lecteur.

Remarque : Le nombre chromatique d'un graphe simple G est supérieur ou égal à l'ordre du plus grand sous-graphe de G , qui soit un graphe complet.

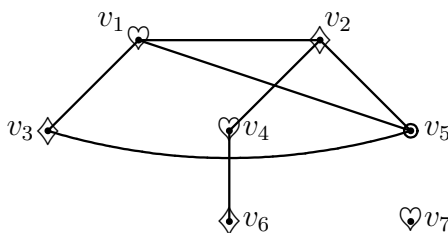
Algorithme 5.6 (*Algorithme "glouton" dû à Welsh et Powell*) :

On ordonne arbitrairement les n sommets du graphe simple G : v_1, \dots, v_n .

On attribue au sommet v_1 la couleur 1. Puis on colorie, avec la couleur 1, successivement les sommets de la liste (v_1, \dots, v_n) qui ne sont pas adjacents à un sommet déjà colorié.

S'il reste des sommets non coloriés, on attribue la couleur 2 au premier sommet non colorié et on recommence le processus précédent jusqu'à épuisement des couleurs.

Exemple : Pour le graphe suivant

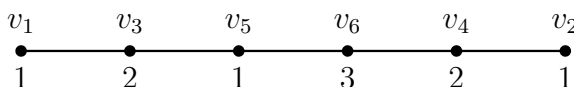


on obtient la 3-coloration définie par :

$$\begin{aligned} \gamma(v_1) = \gamma(v_4) = \gamma(v_7) &= 1 \quad (\text{sommets marqués } \heartsuit), \\ \gamma(v_2) = \gamma(v_3) = \gamma(v_6) &= 2 \quad (\text{sommets marqués } \diamond), \\ \gamma(v_5) &= 3 \quad (\text{sommet marqué } \circ). \end{aligned}$$

Remarque : Cet algorithme fournit une k -coloration de G , avec $k \geq \gamma(G)$, mais pas nécessairement $k = \gamma(G)$.

Contre-exemple : La numérotation suivante des sommets de la chaîne de longueur 5 donne une 3-coloration, alors que son nombre chromatique est 2.



Théorème 5.7 : Soit G un graphe simple de degré maximum $\Delta(G)$, on a :

$$\gamma(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Preuve : Si le graphe G a été colorié au moyen de l'algorithme précédent avec k couleurs. Le dernier sommet colorié est adjacent à au moins l'un des sommets coloriés avec les $k - 1$ premières couleurs, sinon il aurait été colorié avec l'une de ces couleurs. Son degré est donc supérieur ou égal à $k - 1$. Par suite, on a :

$$\Delta(G) \geq k - 1 \geq \gamma(G) - 1,$$

d'où le résultat.

Théorème 5.8 : (*Théorème des 4 couleurs*) :

Il suffit de 4 couleurs pour colorier une carte de géographie, de manière que deux pays limitrophes ne soient pas coloriés avec la même couleur.

Admis

Ce célèbre problème, posé dès 1852, n'a été résolu qu'en 1976 par les Américains Appel et Haken, par un raisonnement mathématique aidé d'un calcul sur ordinateur (étude de plus de 2000 configurations incontournables).

§6. Chaînes d'un multigraphe

Définitions 6.1 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe et soit k un entier strictement positif. Une k -chaîne (ou *chaîne de longueur k*) de G est une suite $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, telle que, pour tout i de $\llbracket 1, k \rrbracket$, e_i soit une arête de G d'extrémités v_{i-1} et v_i .

Les sommets v_0 et v_k sont respectivement appelés *extrémité initiale* et *extrémité finale* de la k -chaîne.

SI $v_0 = v_k$, on dit que la k -chaîne est *fermée*.

Pour tout sommet v de G , la suite (v) est appelée 0-chaîne de G .

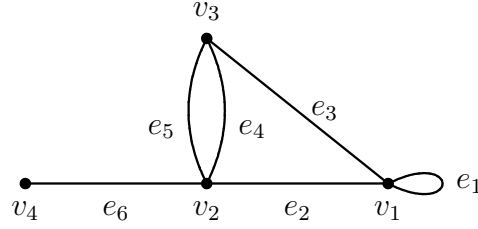
Si les arêtes e_1, \dots, e_k sont distincts, on dit que la chaîne est *simple*.

Si les sommets v_0, \dots, v_k sont distincts, on dit que la chaîne est *élémentaire*.

On convient qu'une 0-chaîne est élémentaire.

Remarque : Toute chaîne élémentaire est simple.

Exemple : Dans le multigraphe suivant



$(v_1, e_2, v_2, e_6, v_4)$ est une 2-chaîne simple et élémentaire.

(v_1, e_2, v_2) est une 1-chaîne simple et élémentaire.

(v_1, e_1, v_1) est une 1-chaîne simple, non élémentaire, fermée.

$(v_1, e_1, v_1, e_3, v_3, e_4, v_2)$ est une 3-chaîne simple, non élémentaire.

$(v_1, e_3, v_3, e_3, v_1, e_2, v_2)$ est une 3-chaîne, ni simple, ni élémentaire.

Propriété 6.2 : Pour k positif ou nul, toute k -chaîne d'extrémités u et v , distinctes, contient une chaîne élémentaire d'extrémités u et v .

Preuve :

Soit $C_0 = (v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ une k -chaîne d'extrémités u et v . Si C_0 n'est pas élémentaire, il existe i et j dans $\llbracket 0, k \rrbracket$, tels que $i < j$ et $v_i = v_j$. Soit C_1 la chaîne obtenu à partir de C_0 , en supprimant la sous-suite (e_{i+1}, \dots, v_j) . Si C_1 est élémentaire, C_1 est une chaîne élémentaire contenue dans C_0 . Sinon, on recommence. Les opérations s'arrêtent, car la longueur de la chaîne décroît.

Théorème 6.3 : Tout graphe *simple* de degré minimum δ contient une chaîne élémentaire de longueur supérieure ou égale à δ .

Preuve :

Soit G un graphe simple de degré minimum δ et soit $C = (v_0, e_1, \dots, e_h, v_h)$ une chaîne élémentaire de longueur h maximum. Tous les voisins de v_0 , dans G , sont des sommets de C . On a donc : $d(v_0) \leq h$ et avec $\delta \leq d(v_0)$, $\delta \leq h$.

Théorème 6.4 : Soit un multigraphe $G = (V, E)$, avec $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et soit A la matrice d'adjacence de G . Pour tout entier naturel k , le nombre de k -chaînes d'extrémité initiale v_i et d'extrémité finale v_j est le terme de rang (i, j) de la matrice A^k .

Preuve :

Notons a_{ij} le terme de rang (i, j) de la matrice A et $a_{ij}^{(k)}$ le terme de rang (i, j) de la matrice A^k et montrons, par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(k)$:

$\mathcal{P}(k) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ij}^{(k)}$ est le nombre de k -chaînes du sommet v_i au sommet v_j .

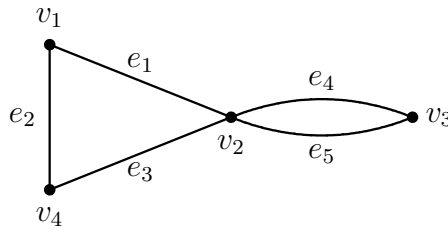
Pour $k = 0$, la matrice A^k est la matrice unité.

Pour i différent de j , le nombre de 0-chaînes d'extrémité initiale v_i et d'extrémité finale v_j est 0 et on a : $a_{ij} = 0$. Pour tout i , le nombre de 0-chaînes fermées d'extrémités initiale et finale v_i est 1 et on a : $a_{ii}^{(0)} = 1$.

La proposition $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Soit $k \geq 0$. Supposons que la proposition $\mathcal{P}(k)$ soit vraie et montrons que la proposition $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie. Une $(k + 1)$ -chaîne d'extrémités initiale v_i et finale v_j est la réunion d'une k -chaîne d'extrémité initiale v_i et d'extrémité finale un sommet quelconque v_h , et d'une arête d'extrémités v_h et v_j . On en déduit que le nombre de $(k + 1)$ -chaînes entre v_i et v_j est $\sum_{h=1}^n a_{ih}^{(k)} a_{hj}$, qui est le terme de rang (i, j) de la matrice $A^k A = A^{k+1}$.

Exemple :



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En particulier, les 2-chaînes, dont les deux extrémités sont v_2 , sont :

$$\begin{aligned} & (v_2, e_1, v_1, e_1, v_2), \quad (v_2, e_3, v_4, e_3, v_2), \quad (v_2, e_4, v_3, e_4, v_2), \\ & (v_2, e_5, v_3, e_5, v_2), \quad (v_2, e_4, v_3, e_5, v_2), \quad (v_2, e_5, v_3, e_4, v_2). \end{aligned}$$

Algorithme 6.6 (*Algorithme de Moore: Recherche, dans un multigraphe, de chaînes de longueur minimum ayant un sommet initial donné*) :

Soit $G = (V, E)$ un multigraphe.

Pour tout couple (u, v) de sommets de G , on note:

$D(u, v) = \infty$, s'il n'existe pas de chaîne d'extrémités u et v ,

$D(u, v) = \min \{k \mid \exists k\text{-chaîne d'extrémités } u \text{ et } v\}$, s'il en existe une.

Soit u_0 un sommet de G . On se propose de trouver des chaînes de longueur minimum, de sommet initial u_0 .

Nous allons étiqueter les sommets v de G , qui sont tels que $D(u_0, v) \neq \infty$.

Le sommet u_0 est étiqueté 0.

Si u_0 n'a aucun voisin autre que lui-même, tout sommet v de G , distinct de u_0 , est tel que $D(u_0, v) = \infty$ et on arrête l'algorithme.

Sinon, tous les voisins de u_0 sont étiquetés 1.

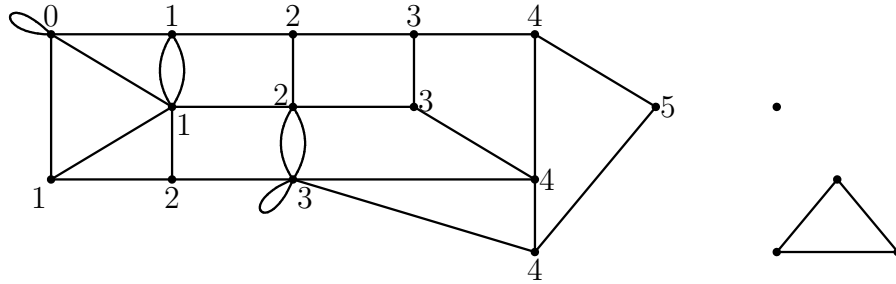
Soit k un entier strictement positif. Supposons avoir étiqueté une partie de V au moyen des nombres $0, \dots, k$, de manière que tout voisin d'un sommet étiqueté par $0, \dots, k - 1$ soit lui-même étiqueté. Soit V_k l'ensemble des sommets de V étiquetés k . Si les sommets de V_k n'ont aucun voisin non étiqueté, on arrête l'algorithme. Sinon, on étiquette $k + 1$ tout sommet non encore étiqueté et voisin d'un sommet de V_k .

L'ensemble V étant fini, l'algorithme s'arrête à un rang k_0 .

Tout sommet v non étiqueté est tel que $D(u_0, v) = \infty$.

Soit k appartenant à $\llbracket 0, k_0 \rrbracket$, pour tout sommet v étiqueté k , $D(u_0, v) = k$.

Exemple :



Définition 6.7 : On dit qu'un graphe *simple* $G = (V, E)$ est *valué*, s'il est muni d'une application

$$\mu : E \longrightarrow \mathbb{R}_+^*.$$

Pour toute arête e de G , le nombre $\mu(e)$ est appelé *poids* de e .

Le poids d'une chaîne $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ de G , est $\sum_{i=1}^k \mu(e_i)$.

Algorithme 6.8 (*Algorithme de Dijkstra : Recherche, dans un graphe simple valué, de chaînes de poids minimum ayant un sommet initial donné*):

On note n le cardinal de V . Soit u_0 un élément de V . On se propose de trouver des chaînes de sommet initial u_0 et de poids minimum.

On attribue, à chaque sommet v , une étiquette, $\lambda(v)$, élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, qui sera progressivement modifiée, jusqu'à devenir définitive.

On pose d'abord :

$$\lambda(u_0) = 0, \text{ et } \forall v \in V \setminus \{u_0\}, \lambda(v) = \infty.$$

Le sommet u_0 est étiqueté définitivement.

Supposons avoir étiqueté définitivement k sommets. Soit v le k -ème sommet étiqueté définitivement. Si $k = n$, on arrête l'algorithme. Si $k < n$, on note W l'ensemble des sommets non encore définitivement étiquetés. Soit w un sommet de W . Nous allons modifier l'étiquette de w :

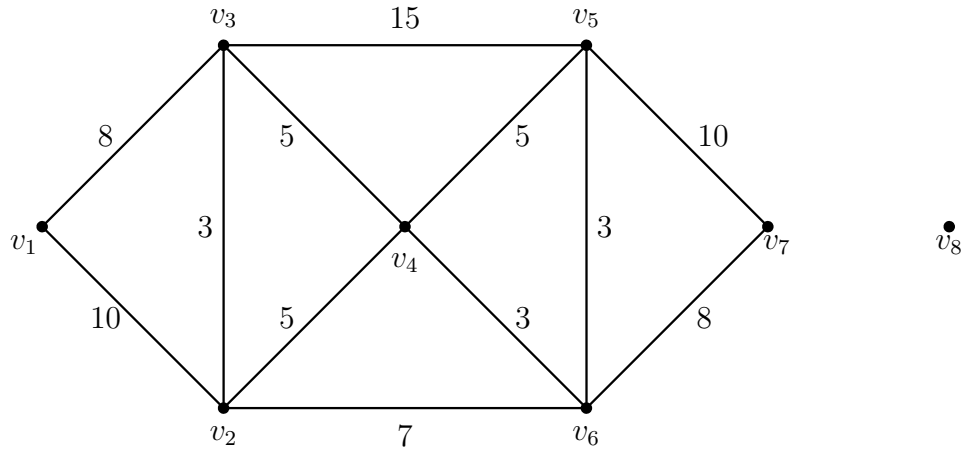
Si w n'est pas adjacent à v ou si $\lambda(w) \leq \lambda(v) + \mu(\{v, w\})$, on conserve $\lambda(w)$.

Sinon, on remplace $\lambda(w)$ par $\lambda(v) + \mu(\{v, w\})$ et on note entre parenthèse v à côté de $\lambda(w)$.

Parmi tous les sommets de W , on en choisit un d'étiquette minimum. Cette étiquette est alors définitive. On a ainsi étiqueté définitivement $k + 1$ sommets. Quand les n sommets de G sont définitivement étiquetés, soit u un sommet de G distinct de u_0 . Si $\lambda(u) = \infty$, il n'existe aucune chaîne d'extrémités u_0 et u . Si $\lambda(u) \neq \infty$, $\lambda(u)$ est le poids minimum d'une chaîne d'extrémités u_0 et u . En partant de u , les sommets indiqués entre parenthèses permettent de reconstruire une chaîne de longueur minimum d'extrémités u_0 et u .

Remarque : Dans le cas d'un graphe simple non valué G , en attribuant le poids 1 à toute arête de G , on retrouve l'algorithme de Moore.

Exemple :



λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	$10(v_1)$	$8(v_1)$	∞	∞	∞	∞	∞
	$10(v_1)$		$13(v_3)$	$23(v_3)$	∞	∞	∞
			$13(v_3)$	$23(v_3)$	$17(v_2)$	∞	∞
				$18(v_4)$	$16(v_4)$	∞	∞
				$18(v_4)$		$24(v_6)$	∞
						$24(v_6)$	∞

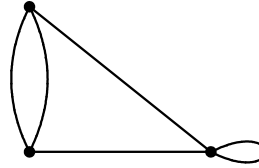
On obtient une chaîne de poids minimum entre v_1 et v_7 , les sommets de cette chaîne étant (à partir de v_7) : v_7, v_6, v_4, v_3, v_1 .

§7. Graphes connexes

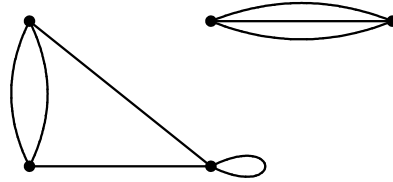
Définition 7.1 : On dit qu'un multigraphe $G = (V, E)$ est *connexe* si, pour tout couple (u, v) de sommets de G , il existe une chaîne d'extrémités u et v .

Remarque : D'après le théorème 6.2, le multigraphe G est connexe, si et seulement si, pour tout couple (u, v) de sommets de G , il existe une chaîne *élémentaire* d'extrémités u et v .

Exemple de multigraphe connexe :



Exemple de multigraphe non connexe :



Définition 7.2 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe et soit \mathcal{R} la relation binaire sur V définie par :

$$u\mathcal{R}v \iff \exists \text{ une chaîne d'extrémités } u \text{ et } v.$$

La relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur V . (*La vérification est laissée au lecteur.*)

Les sous-graphes de G , engendrés par les classes d'équivalence de la relation \mathcal{R} , sont appelées *composantes connexes de G* .

Propriétés 7.3 : Avec les notations de la définition 7.2,

- 1) les classes d'équivalence forment une partition de V ,
- 2) toute composante connexe est un multigraphe connexe,
- 3) le multigraphe G est connexe, si et seulement s'il admet une seule composante connexe,
- 4) si G n'est pas connexe et si u et v sont des sommets de G appartenant à deux composantes connexes distinctes, il n'existe pas, dans G , de chaîne d'extrémités u et v .

Preuve :

- 1) C'est une propriété des relations d'équivalence.
- 2) Soit H une composante connexe de G et soit u et v des sommets de H . Il existe une chaîne C de G d'extrémités u et v . Pour tout sommet w de C , il existe une chaîne (sous-chaîne de C) d'extrémités u et w . Donc w est un sommet de H et C est une chaîne de H .

3) C'est une conséquence de 2) et de la définition de la relation \mathcal{R} .

4) C'est une conséquence de 2).

Exemple :

Le deuxième multigraphe de l'exemple précédent admet deux composantes connexes.

Remarque : Soit u et v des sommets d'un multigraphe $G = (V, E)$. Notons, comme dans l'algorithme de Moore :

$D(u, v) = \infty$, s'il n'existe pas de chaîne d'extrémités u et v ,

$D(u, v) = \min \{k \mid \exists k\text{-chaîne d'extrémités } u \text{ et } v\}$, s'il en existe une.

Le multigraphe G est connexe, si et seulement si

$$\forall (u, v) \in V \times V, D(u, v) \neq \infty.$$

Dans ce cas, l'application

$$D : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une distance sur V .

La vérification est laissée au lecteur.

Définition 7.4 : Si le multigraphe G est connexe, son *diamètre* est

$$\max\{D(u, v) \mid (u, v) \in V \times V\}.$$

Ce nombre peut être obtenu au moyen de l'algorithme de Moore.

Théorème 7.5 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe d'ordre supérieur ou égal à 2. Ce multigraphe est connexe, si et seulement si pour toute partition de V en deux sous-ensembles V_1 et V_2 , il existe une arête de G , ayant une extrémité dans V_1 et une extrémité dans V_2 .

Preuve :

Supposons G connexe. Soit (V_1, V_2) une partition de V . Les ensembles V_1 et V_2 sont non vides, donc il existe v et w , appartenant respectivement à V_1 et V_2 . Le multigraphe G étant connexe, il existe une chaîne $(u_0, e_1, \dots, e_k, u_k)$ d'extrémités v et w , avec $u_0 = v$ appartenant à V_1 et $u_k = w$ appartenant à V_2 .

L'ensemble $I = \{i \in \llbracket 1, k \rrbracket \mid u_i \in V_2\}$ est non vide, donc admet un plus petit élément i_0 .

L'indice i_0 appartient à I , donc v_{i_0} appartient à V_2 et l'indice $i_0 - 1$ n'appartient pas à I , donc u_{i_0-1} appartient à V_1 . L'arête e_{i_0} de G a donc une extrémité dans V_1 et une extrémité dans V_2 .

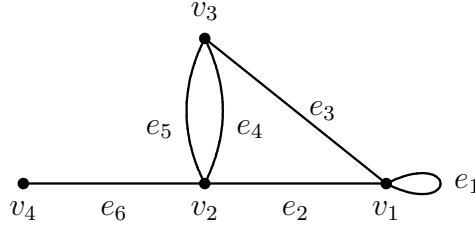
Réciproquement, supposons G non connexe. Il existe une partition (V_1, \dots, V_k) de V , où V_1, \dots, V_k sont les ensembles de sommets engendrant les k composantes connexes, avec $k \geq 2$. Posons alors $W = \bigcup_{i=2}^k V_i$. L'ensemble V est partitionné en $V_1 \cup W$ et il n'existe aucune arête ayant une extrémité dans V_1 et une extrémité dans W .

§8. Cycles d'un multigraphe

Définition 8.1 : Pour $k \geq 1$, un k -cycle (ou cycle de longueur k) d'un multigraphe est une k -chaîne simple fermée $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_0)$.

Si les sommets v_0, \dots, v_{k-1} sont distincts, on dit que le cycle est *élémentaire*.

Exemple : Dans le multigraphe suivant



$(v_1, e_1, v_1, e_3, v_3, e_4, v_2, e_2, v_1)$ est un 4-cycle non élémentaire,

$(v_1, e_3, v_3, e_4, v_2, e_2, v_1)$ est un 3-cycle élémentaire.

(v_1, e_1, v_1) est un 1-cycle élémentaire.

$(v_3, e_3, v_1, e_3, v_3)$ est une chaîne fermée, pas un cycle.

Théorème 8.2 : Tout multigraphe, de degré minimum supérieur ou égal à 2, contient un cycle élémentaire.

Preuve : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe, de degré minimum supérieur ou égal à 2. L'ensemble E est non vide.

Si toutes les arêtes de G sont des boucles, ce sont des 1-cycles élémentaires. Sinon, il existe une arête e d'extrémités u et v distinctes et la chaîne (u, e, v) est élémentaire.

Soit alors $(v_0, e_1, \dots, e_k, v_k)$ une k -chaîne élémentaire de longueur maximum $k \geq 1$. Le degré de v_k étant supérieur ou égal à 2, il existe une arête e distincte de e_k et incidente à v_k . Soit v_k et w les extrémités de l'arête e , distinctes ou non. La chaîne $(v_0, e_1, \dots, e_k, v_k)$ étant de cardinal maximum, le sommet w appartient à l'ensemble $\{v_0, \dots, v_k\}$. Soit i l'élément de $\llbracket 0, k \rrbracket$ tel que $w = v_i$. La suite $(v_i, \dots, v_k, e, w = v_i)$ est un cycle élémentaire.

Théorème 8.3 : Tout graphe simple, G , de degré minimum δ , supérieur ou égal à 2, contient un cycle élémentaire de longueur strictement supérieure à δ .

Preuve : D'après le théorème 6.3, le graphe G admet une chaîne élémentaire de longueur supérieure ou égale à δ .

Soit $(v_0, e_1, \dots, e_k, v_k)$ une k -chaîne élémentaire de G de longueur maximum. On a $k \geq \delta \geq 2$ et $d(v_0) \geq \delta \geq 2$. La chaîne $(v_0, e_1, \dots, e_k, v_k)$ étant de longueur maximum, tous les voisins de v_0 sont éléments de l'ensemble $\{v_1, \dots, v_k\}$. L'ensemble $\{i \in \llbracket 1, k \rrbracket \mid \{v_0, v_i\} \in E\}$ est de cardinal $d(v_0)$, supérieur ou égal à δ , donc non vide et admet un plus grand élément $l \geq \delta$. La suite (v_0, v_1, \dots, v_l) est alors un $(l + 1)$ -cycle élémentaire avec $l + 1 \geq \delta + 1 > \delta$.

Théorème 8.4 : Un multigraphe, d'ordre supérieur ou égal à 2, est biparti, si et seulement s'il ne contient pas de cycle de longueur impaire.

Preuve : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe biparti, défini par une partition de $V : V = V_1 \cup V_2$. Si G est sans cycle, il n'admet pas de cycle impair. Sinon, soit $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k = v_0)$, un k -cycle de G avec, par exemple, v_0 élément de V_2 . Les sommets d'indice pair appartiennent tous à V_2 et ceux d'indice impair à V_1 . En particulier, $v_k = v_0$ appartient à V_2 . On en déduit k pair.

Pour la réciproque, nous allons montrer, par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(m)$:

$\mathcal{P}(m)$ Tout multigraphe G , d'ordre supérieur ou égal à 2, sans cycle impair et dont le nombre d'arêtes est m , est biparti.

Pour $m = 0$, le multigraphe G est stable, donc biparti. La proposition $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Supposons alors que m soit supérieur ou égal à 1 et que la proposition $\mathcal{P}(m-1)$ soit vraie. Soit G un multigraphe d'ordre supérieur ou égal à 2, sans cycle impair et dont le nombre d'arêtes est m . Soit δ son degré minimum.

1er cas : $\delta = 1$.

Le multigraphe G admet au moins un sommet u de degré 1. Soit v l'unique voisin de u et soit e l'unique arête incidente à u . Les sommets u et v sont distincts, car une boucle étant un cycle de longueur impaire, le multigraphe G est sans boucle. D'après l'hypothèse de récurrence, le multigraphe $G \setminus \{e\}$ est biparti. Soit $V = V_1 \cup V_2$ la partition de V , associée. Supposons, par exemple, que v appartienne à V_1 . Si u appartient à V_2 , le multigraphe G est biparti, associé à la partition $V = V_1 \cup V_2$. Si u appartient à V_1 , le multigraphe G est biparti, associé à la partition $V = (V_1 \setminus \{u\}) \cup (V_2 \cup \{u\})$.

2ème cas : $\delta \geq 2$.

D'après le théorème 8.2, G contient au moins un cycle $(v_0, e_1, \dots, e_k, v_k = v_0)$. Par hypothèse, ce cycle est de longueur paire, donc l'entier k est pair. D'après l'hypothèse de récurrence, le multigraphe $G \setminus \{e_1\}$ est biparti, associé à la partition $V = V_1 \cup V_2$ de V et contient la chaîne (v_1, \dots, v_k) . Supposons, par exemple, que v_1 appartienne à V_1 . Pour tout i pair appartenant à $\llbracket 1, k \rrbracket$, v_i appartient à V_2 , en particulier v_k appartient à V_2 , et G est biparti, associé à la partition $V = V_1 \cup V_2$ de V .

On a ainsi prouvé que, si m est supérieur ou égal à 1, la proposition $\mathcal{P}(m-1)$ implique la proposition $\mathcal{P}(m)$.

§9. Arbres

Définitions 9.1 : Une *forêt* est un multigraphe sans cycle.

Un *arbre* est un multigraphe connexe sans cycle.

Conséquences :

- 1) Une forêt est un graphe simple.
- 2) Les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.

Théorème 9.2 : Une forêt, d'ordre supérieur ou égal à 2, est un graphe biparti.

Preuve immédiate en utilisant le théorème 8.4 (un multigraphe, d'ordre supérieur ou égal à 2, est biparti, si et seulement s'il n'admet pas de cycle impair).

Définition 9.3 : On appelle *sommet pendant* ou *feuille* d'un multigraphe, tout sommet de degré 1.

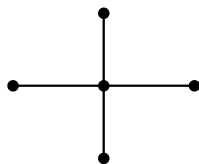
Théorème 9.4 : Si une forêt possède au moins une arête, elle admet au moins deux sommets pendants.

Preuve : Soit $G = (V, E)$ une forêt admettant au moins une arête $e = \{u, v\}$. La suite (u, e, v) est une 1-chaîne élémentaire. Soit alors $C = (v_0, e_1, \dots, e_k, v_k)$ une chaîne élémentaire maximale de G . Le graphe G admettant une 1-chaîne élémentaire, on a $k \geq 1$. De plus, le graphe G étant sans cycle, on a $v_0 \neq v_k$. Supposons que le degré de v_k soit strictement supérieur à 1. Le graphe G étant sans cycle, il existe un sommet v distinct de v_0, \dots, v_{k-1} et adjacent à v_k , ce qui est contraire au fait que la chaîne C est maximale. On en déduit que v_k est de degré 1. On montre de même que v_0 est de degré 1.

Corollaire : Un arbre, d'ordre supérieur ou égal à 2, admet au moins deux sommets pendants.

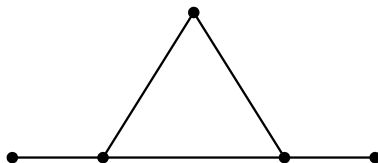
Remarque 1 : Un arbre peut avoir plus de deux sommets pendants.

Exemple :



Remarque 2 : Un multigraphe peut avoir deux sommets pendants sans être une forêt.

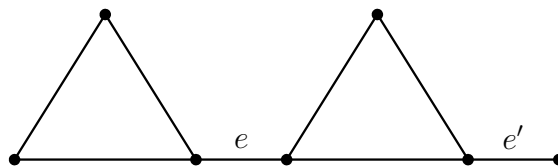
Exemple :



Remarque 3 : Les chaînes sont des arbres admettant exactement deux sommets pendants et on peut montrer que ce sont les seuls.

Définition 9.5 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe et soit e une arête de G . On dit que e est un *isthme* de G , si G est connexe et si $G \setminus \{e\}$ est non connexe.

Exemple : Dans le graphe suivant :



les arête e et e' sont des isthmes.

Théorème 9.6 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe, avec $|V| = n$ et $|E| = m$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Le multigraphe G est un arbre.
- (ii) Le multigraphe G est connexe et $m = n - 1$.
- (iii) Le multigraphe G est sans cycle et $m = n - 1$.
- (iv) Pour tout couple (u, v) de sommets, il existe une unique chaîne d'extrémités initiale u et finale v . (Remarquons que cette chaîne est alors élémentaire.)
- (v) Le multigraphe G est connexe et toute arête de G est un isthme.
- (vi) Le multigraphe G est sans cycle et pour tout couple (u, v) de sommets distincts et non adjacents, le multigraphe $(V, E \cup \{e\})$, où e est une arête d'extrémités u et v , admet un cycle. (Remarquons que ce cycle est alors unique.)

Preuve :

(i) \Rightarrow (ii) et (iii) : Montrons, par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$:

$\mathcal{P}(n)$ Tout arbre d'ordre n admet exactement $n - 1$ arêtes.

Pour $n = 1$, tout arbre est réduit à un sommet. La proposition $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.

Fixons alors $n \geq 2$ et supposons que la proposition $\mathcal{P}(n - 1)$ soit vraie. Soit G un arbre d'ordre n . Il admet au moins une arête, donc au moins deux sommets pendants. Soit v_0 l'un de ces sommets pendants. Le sous-graphe de G , $G_{V \setminus \{v_0\}}$, est un arbre d'ordre $n - 1$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il admet $n - 2$ arêtes. L'ensemble des arêtes de G est la réunion de l'ensemble des arêtes de $G_{V \setminus \{v_0\}}$ et de l'arête e_0 incidente à v_0 . Il est donc de cardinal $n - 1$.

On a ainsi prouvé que, pour $n \geq 2$, la proposition $\mathcal{P}(n - 1)$ implique la proposition $\mathcal{P}(n)$.

(ii) \Rightarrow (i) : Montrons, par récurrence, la proposition $\mathcal{Q}(n)$:

$\mathcal{Q}(n)$ Tout multigraphe connexe, d'ordre n , dont le nombre d'arêtes est $n - 1$, est un arbre.

Remarquons tout d'abord que, pour $n \geq 2$, un tel multigraphe admet au moins un sommet pendant. En effet, il n'admet pas de sommet de degré zéro et si tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à 2, la somme des degrés est supérieure ou égal à $2n$, donc le nombre d'arêtes est supérieur ou égal à n .

Pour $n = 1$, le graphe, réduit à un sommet, admet zéro arête et est un arbre. La proposition $\mathcal{Q}(1)$ est donc vraie.

Fixons donc $n \geq 2$ et supposons que la proposition $\mathcal{P}(n - 1)$ soit vraie. Soit G un multigraphe connexe d'ordre n , dont le nombre d'arêtes est $n - 1$. Ce multigraphe admet au moins un sommet pendant, v_0 . Le sous-graphe de G , $G_{V \setminus \{v_0\}}$, est connexe, d'ordre $n - 1$, admettant $n - 2$ arêtes, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, est un arbre, donc est sans cycle. On en déduit que G est aussi sans cycle, donc est un arbre.

On a ainsi prouvé que, pour $n \geq 2$, la proposition $\mathcal{Q}(n - 1)$ implique la proposition $\mathcal{Q}(n)$.

(iii) \Rightarrow (i) : Montrons, par récurrence, la proposition $\mathcal{R}(n)$:

$\mathcal{R}(n)$ Tout graphe sans cycle, d'ordre n ,
 dont le nombre d'arêtes est $n - 1$, est un arbre.

Pour $n = 1$, le graphe, réduit à un sommet, admet zéro arête et est un arbre. La proposition $\mathcal{R}(1)$ est donc vraie.

Fixons donc $n \geq 2$ et supposons que la proposition $\mathcal{R}(n - 1)$ soit vraie. Soit G un graphe sans cycle d'ordre n , dont le nombre d'arêtes est $n - 1$. D'après le théorème 9.3, ce graphe admet au moins un sommet pendant, v_0 . Le sous-graphe de G , $G_{V \setminus \{v_0\}}$ est sans cycle, d'ordre $n - 1$, admettant $n - 2$ arêtes, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, est un arbre, donc est connexe. On en déduit que G est aussi connexe, donc est un arbre.

On a ainsi prouvé que, pour $n \geq 2$, la proposition $\mathcal{R}(n - 1)$ implique la proposition $\mathcal{R}(n)$.

(i) \Rightarrow (iv) : Soit G un arbre et soit (u, v) un couple de sommets de G .

Si $u = v$, (u) est une chaîne et, G étant sans cycle, il n'existe pas d'autre chaîne fermée passant par u , car une telle chaîne contiendrait une chaîne élémentaire fermée, donc un cycle.

Si u et v sont distincts, le graphe G étant connexe, il existe au moins une chaîne élémentaire d'extrémités initiale u et finale v . Supposons qu'il en existe deux, C_1 et C_2 , distinctes. Il existerait au moins un sommet x appartenant à l'une et pas à l'autre, donc au moins une arête appartenant à l'une et pas à l'autre. Par exemple, il existerait $e = \{x, y\}$ appartenant à C_1 et n'appartenant pas à C_2 . La réunion de la chaîne C_1 et de la chaîne C_2 , privée de l'arête $e = \{x, y\}$ serait une chaîne d'extrémités x et y , donc contiendrait une chaîne élémentaire d'extrémités x et y . En adjoignant l'arête e à cette chaîne, on obtiendrait un cycle, ce qui est contraire au fait que G est sans cycle.

(iv) \Rightarrow (i) : Soit G un multigraphe possédant la propriété (iv). Ce multigraphe est connexe.

S'il contenait une boucle e incidente à un sommet v , on aurait deux chaînes fermées distinctes (v) et (v, e, v) contenant le sommet v .

Supposons maintenant que G contienne un cycle de longueur supérieure ou égale à 2. Ce cycle contiendrait deux sommets distincts u et v , donc deux chaînes d'extrémités initiale u et finale v .

(iv) \Rightarrow (v) : Si on a la propriété (iv), le multigraphe G est connexe. Soit alors e une arête quelconque de G . Notons u et v ses extrémités. La suite (u, e, v) est une chaîne d'extrémité initiale u et finale v et, par hypothèse, c'est la seule. Donc le graphe $G \setminus \{e\}$ ne possède aucune chaîne d'extrémités u et v et n'est pas connexe.

(iv) \Rightarrow (vi) : Si on a la propriété (iv), le multigraphe G est sans cycle. Soit u et v deux sommets non adjacents de G . Par hypothèse, il existe, dans G une chaîne C d'extrémités u et v et on a déjà remarqué que cette chaîne est élémentaire, donc simple. En rajoutant l'arête $\{u, v\}$, on obtient un cycle. Remarquons que la chaîne C étant unique, il en est de même du cycle obtenu en rajoutant l'arête $\{u, v\}$.

(v) \Rightarrow (i) : Si le multigraphe G admet un cycle, aucune arête de ce cycle n'est un isthme de G . Donc, si toute arête de G est un isthme, G est sans cycle.

(vi) \Rightarrow (i) : Montrons que, si le multigraphe G possède la propriété (vi), il est connexe. Soit (u, v) un couple de sommets de G . Si $u = v$, il existe une 0-chaîne d'extrémités u et v . Si u et v sont adjacents, il existe une 1-chaîne d'extrémités u et v . Dans les autres cas, le multigraphe obtenu en rajoutant l'arête $\{u, v\}$ admet un cycle et il existe dans G une chaîne de u à v .

Définition 9.7 : Un *arbre couvrant* d'un multigraphe G est un graphe couvrant de G (définition 4.3), qui soit un arbre.

Exemple : Les deux arbres suivants sont des arbres couvrants de la 4-clique :



Théorème 9.8 : Un multigraphe est connexe, si et seulement s'il admet un arbre couvrant.

Preuve :

Soit $G = (V, E)$ un multigraphe connexe.

Si G est d'ordre 1, le multigraphe (V, \emptyset) est un arbre couvrant de G .

Sinon, soit G' un graphe couvrant de G , connexe, minimal : c'est-à-dire que G' est connexe, mais, pour toute arête e de G' , le graphe $G' \setminus \{e\}$ est non connexe. Un tel graphe existe, car G est un graphe couvrant, connexe, de lui-même et (V, \emptyset) est un graphe couvrant, non connexe, de G .

L'arête e est alors un isthme de G' et, d'après le théorème 9.6, G' est un arbre. La réciproque est immédiate.

Corollaire : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe, avec $|V| = n$ et $|E| = m$, si G est connexe, $m \geq n - 1$.

Algorithme 9.9 : *Algorithme glouton* pour la construction d'un arbre couvrant d'un multigraphe connexe.

Soit $G = (V, E)$ un multigraphe connexe.

Dans le cas où G est d'ordre 1, (V, \emptyset) est un arbre couvrant de G .

Soit G un multigraphe d'ordre supérieur ou égal à 2. L'ensemble E est non vide. Notons-le $\{e_1, \dots, e_m\}$.

Pour tout sous-ensemble E' , non vide de E , nous appellerons sous-graphe de G , induit par E' , le graphe $G' = (V', E')$, dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des extrémités des arêtes de E' .

Nous allons marquer successivement des arêtes de G .

On marque d'abord l'arête e_1 .

Soit $k \geq 0$. Supposons avoir marqué les arêtes $e_{i_1} = e_1, \dots, e_{i_k}$. Soit l'ensemble

$$J_k = \{j > i_k \mid \text{le sous-graphe de } G \text{ induit par } \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_j\} \text{ soit sans cycle}\}.$$

Si J_k est non vide, on note i_{k+1} le plus petit élément de cet ensemble et on marque l'arête $e_{i_{k+1}}$. Sinon, on arrête l'algorithme.

A la fin de l'algorithme, on a marqué les arêtes e_{i_1}, \dots, e_{i_l} . Le sous-graphe de G induit par l'ensemble E' de ces arêtes est une forêt maximale, car, pour tout e de $E \setminus E'$, le sous-graphe de G induit par $E' \cup \{e\}$ admet un cycle, donc n'est pas une forêt.

Montrons que G' est un arbre couvrant de G .

Plus généralement, nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme : Soit G un multigraphe connexe et soit G' un sous-graphe de G qui soit une forêt maximale. Alors, G' est un arbre couvrant de G .

Preuve : Notons V et V' les ensembles de sommets respectifs de G et de G' .

Supposons que V' soit distinct de V . Le graphe G étant connexe, d'après le théorème 7.5, il existerait une arête e' de G ayant une extrémité dans V' et une extrémité dans $V \setminus V'$, ce qui est contraire au fait que G' soit une forêt maximale. On a ainsi montré que $V = V'$, donc que G' est un graphe couvrant de G .

Supposons maintenant que G' ne soit pas connexe. Soit V_1 un sous-ensemble de V' engendrant une composante connexe de G' . L'ensemble V est partitionné en $V_1 \cup (V \setminus V_1)$. Le graphe G étant connexe, il existe, toujours d'après le théorème 7.5, une arête e de G ayant une extrémité dans V_1 et une extrémité dans $V \setminus V_1$. Cette arête n'est pas une arête de G' , sinon ce serait une arête de la composante connexe engendrée par V_1 .

Par définition de V_1 , e n'est pas une arête de G' , mais $G' \cup \{e\}$ est une forêt, ce qui est encore contraire au fait que G' soit une forêt maximale. On a ainsi montré que le graphe G' est connexe, donc est un arbre.

Extension à un multigraphe valué :

En indexant les éléments de E par poids croissants, l'algorithme glouton permet de construire un arbre couvrant de G de poids minimum.

On construit, de manière analogue, un arbre couvrant de poids maximum.

§10. Graphes eulériens

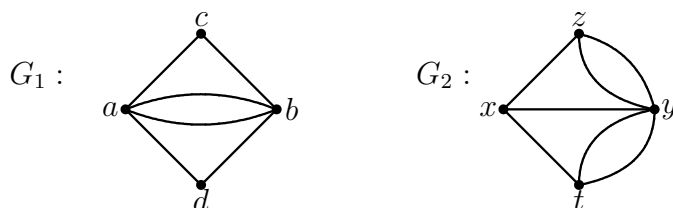
Définition 10.1 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe. Un *cycle eulérien* de G est un cycle contenant chaque arête de G . On dit que G est un *multigraphe eulérien*, s'il est réduit à un sommet isolé ou s'il est connexe et admet un cycle eulérien.

Remarque 1 : Les arêtes d'un cycle étant distinctes, un cycle eulérien de G contient chaque arête de G exactement une fois.

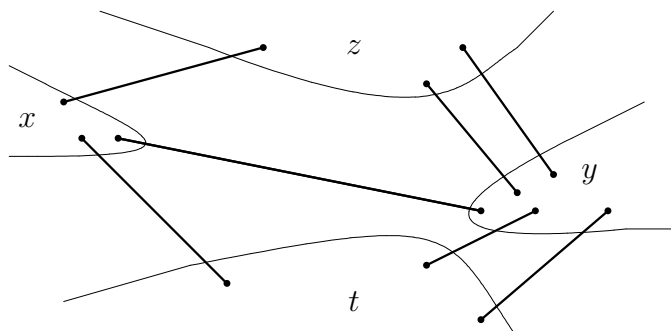
Remarque 2 : Un cycle eulérien n'est pas nécessairement élémentaire.

Exemples :

Le multigraphe G_1 est eulérien, le multigraphe G_2 ne l'est pas:



Le multigraphe G_2 est l'interprétation graphique du célèbre problème des ponts de Königsberg, sur la rivière Pregel:



Il s'agissait de partir d'une rive, de passer exactement une fois sur chaque pont et de revenir à son point de départ. Euler a prouvé, en 1736, que c'était impossible.

Théorème 10.2 : Un multigraphe est eulérien, si et seulement si il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.

Preuve :

Le cas d'un multigraphe réduit à un sommet isolé est trivial.

Soit G un multigraphe eulérien, non réduit à un sommet isolé.

Soit $C = (v_1, e_1, \dots, e_k, v_k = v_1)$ un cycle eulérien de G . Pour tout sommet v de G , notons h le nombre d'entiers distincts i_1, \dots, i_h de $\llbracket 1, k \rrbracket$ tels que $v = v_{i_1} = \dots = v_{i_h}$. Le degré de v est le nombre d'arêtes du cycle C incidentes à v , en comptant deux fois chaque boucle, soit $2h$.

Réciproquement, soit $G = (V, E)$ un multigraphe connexe, non réduit à un sommet isolé, et dont tous les sommets sont de degré pair. Ce multigraphe admet au moins une arête e_1 , d'extrémités v_0 et v_1 . Soit $C = (v_0, e_1, \dots, e_k, v_k)$ une chaîne de G , simple, maximale, commençant par (v_0, e_1, v_1) . Soit h le nombre d'entiers distincts i_1, \dots, i_h de $\llbracket 1, k \rrbracket$ tels que $v_k = v_{i_1} = \dots = v_{i_h}$. Si $v_k \neq v_0$, le nombre d'arêtes de C incidentes à v_k est $2h - 1$, ce qui est contraire au fait que v_k est de degré pair. On en déduit que $v_k = v_0$ et que C est un cycle.

Si C contient toutes les arêtes de G , c'est un cycle eulérien de G . Sinon, il existe une arête de G n'appartenant pas à C . Si cette arête a au moins une extrémité n'appartenant pas à C , l'ensemble $V \setminus \{v_0, \dots, v_k\}$ est non vide et, G étant connexe, il existe une arête f_1 de G ayant une extrémité w_0 dans $\{v_0, \dots, v_k\}$ et une extrémité w_1 dans $V \setminus \{v_0, \dots, v_k\}$.

On en déduit que, si C n'est pas un cycle eulérien de G , il existe une arête de G n'appartenant pas à C , mais incidente à au moins un sommet de C . On montre alors, comme précédemment, l'existence d'un cycle C' de G ayant au moins un sommet commun avec C , mais pas d'arête commune avec C . La réunion des deux cycles C et C' est un cycle. Si $C \cup C'$ contient toutes les arêtes de G , c'est un cycle eulérien de G . Sinon, on recommence le processus, jusqu'à épuisement des arêtes de G .

Définition 10.3 : Soit G un multigraphe. Une *chaîne eulérienne* de G est une chaîne simple, de longueur au moins 1, contenant chaque arête de G .

On dit que G est *semi-eulérien*, s'il est réduit à un sommet isolé ou s'il est connexe et admet une chaîne eulérienne.

Remarque 1 : Les arêtes d'une chaîne simple étant distinctes, une chaîne eulérienne de G contient chaque arête de G exactement une fois.

Remarque 2 : Une chaîne eulérienne n'est pas nécessairement élémentaire.

Théorème 10.4 : Un multigraphe est semi-eulérien, si et seulement s'il est connexe et admet 0 ou 2 sommets de degré impair.

Preuve : Remarquons qu'un cycle eulérien de G est une chaîne eulérienne de G , donc qu'un multigraphe eulérien est semi-eulérien.

Soit $G = (V, E)$ un multigraphe semi-eulérien. Il est connexe. S'il est eulérien, il n'admet aucun sommet de degré impair. Sinon, il admet une chaîne eulérienne, qui n'est pas un cycle eulérien. Soit u et v les extrémités de cette chaîne. Le multigraphe G' obtenu en rajoutant à G une arête e , d'extrémités u et v , est eulérien. Pour tout élément x de V , notons $d_G(x)$ le degré de x dans G et $d_{G'}(x)$ le degré de x dans G' . D'après le théorème 10.2, pour tout élément x de V , $d_{G'}(x)$ est pair et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in V \setminus \{u, v\}, d_G(x) &= d_{G'}(x), \\ d_G(u) &= d_{G'}(u) - 1 \text{ et } d_G(v) = d_{G'}(v) - 1. \end{aligned}$$

On en déduit que le degré de tout sommet x de G , distinct de u et v est pair et que les degrés de u et v sont impairs.

Réciproquement, soit G un multigraphe connexe, admettant 0 ou 2 sommets de degré impair. Si G n'admet aucun sommet de degré impair, il est eulérien, donc semi-eulérien.

S'il admet exactement deux sommets u et v de degré impair, le multigraphe G'' obtenu en rajoutant à G une arête e , d'extrémités u et v , a tous ses sommets de degré pair, donc est eulérien. Soit C un cycle eulérien de G'' , $C \setminus \{e\}$ est une chaîne eulérienne de G .

§11. Graphes hamiltoniens

Définitions 11.1 : Soit $G = (V, E)$ un multigraphe. Un *cycle hamiltonien* de G est un cycle contenant chaque sommet de G exactement une fois.

Une *chaîne hamiltonienne* de G est une chaîne contenant chaque sommet de G exactement une fois.

On dit que G est *hamiltonien*, s'il possède un cycle hamiltonien.

Remarques : Un cycle hamiltonien est un cycle élémentaire.

Une chaîne hamiltonienne est une chaîne élémentaire.

Exemples :

Les n -cycles et les n -cliques sont des graphes hamiltoniens.

Tout multigraphe biparti d'ordre impair est non hamiltonien. En effet, un multigraphe biparti ne contient pas de cycle impair.

Remarque : Un graphe simple, d'ordre inférieur ou égal à 2 est non hamiltonien.

Théorème 11.2 : Soit G un graphe *simple* d'ordre supérieur ou égal à 3. Si, pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets non adjacents de G , on a :

$$d(u) + d(v) \geq n,$$

alors G est hamiltonien.

Preuve :

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, d'ordre $n \geq 3$. Montrons que, si G est non hamiltonien, il existe une paire $\{u, v\}$ de sommets non adjacents de G , telle que :

$$d(u) + d(v) \leq n - 1.$$

Cas particulier : Il existe une paire $\{u, v\}$ de sommets non adjacents, telle que le graphe G' obtenu en rajoutant à G l'arête $e = \{u, v\}$ soit hamiltonien.

Soit C' un cycle hamiltonien de G' . $C' \setminus \{e\}$ est une chaîne hamiltonienne de G , d'extrémités u et v . Notons $C = (v_1, \dots, v_n)$ cette chaîne, avec $v_1 = u$ et $v_n = v$. Supposons qu'il existe $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, tel que $\{v_1, v_{i+1}\}$ et $\{v_n, v_i\}$ soit des arêtes de G . Remarquons que v_1 et v_n n'étant pas adjacents, i est différent de 1 et $n-1$, ce qui suppose $n \geq 4$. Le graphe G admettrait un cycle hamiltonien : $(v_1, v_{i+1}, \dots, v_n, v_i, \dots, v_1)$, ce qui est exclu. Notons alors :

$$\begin{aligned} I &= \{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \mid \{v_1, v_{i+1}\} \in E\}, \\ J &= \{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \mid \{v_n, v_i\} \in E\}. \end{aligned}$$

On a : $I \cap J = \emptyset$, donc $|I \cup J| = |I| + |J|$.

Or, $|I| = d(v_1)$ et $|J| = d(v_n)$. De plus, $I \cup J$ est un sous-ensemble de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donc $|I \cup J| \leq n-1$. On en déduit $d(v_1) + d(v_n) \leq n-1$, donc $d(u) + d(v) \leq n-1$.

Cas général :

Remarquons que le graphe G étant non hamiltonien, l'ensemble E est distinct de $\mathcal{P}_2(V)$, car le graphe complet K_n est hamiltonien.

Notons alors k le cardinal de l'ensemble $E \setminus \mathcal{P}_2(V)$, et étiquetons ses éléments : $E \setminus \mathcal{P}_2(V) = \{e_1, \dots, e_k\}$. Posons :

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, G_j = (V, E \cup \{e_1, \dots, e_j\}) \text{ et } G_0 = G.$$

Le graphe $G_0 = G$ est non hamiltonien, le graphe G_k est le graphe complet K_n , qui est hamiltonien.

L'ensemble $\{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \mid G_j \text{ non hamiltonien}\}$ est non vide, majoré, donc admet un plus grand élément p . Le graphe G_p est non hamiltonien, le graphe G_{p+1} est hamiltonien et est obtenu en rajoutant l'arête e_{p+1} au graphe G_p . Posons $e_{p+1} = \{u, v\}$ et notons $d_{G_p}(u)$ et $d_{G_p}(v)$ les degrés respectifs des sommets u et v dans le graphe G_p . L'étude du cas particulier précédent prouve alors que $d_{G_p}(u) + d_{G_p}(v) \leq n-1$, donc, avec u et v non adjacents dans G ,

$$d(u) + d(v) \leq n-1.$$

Corollaire : Tout graphe simple, d'ordre $n \geq 3$ et de degré minimum $\delta \geq \frac{n}{2}$ est hamiltonien.

Preuve immédiate.

Remarque : La réciproque du théorème 11.2 n'est pas vraie, en général.

Contre-exemple : Le n -cycle C_n , avec $n \geq 5$, est tel que

$$\forall (u, v) \in V \times V, d(u) + d(v) = 4 < n.$$

Cependant, il est hamiltonien.

§12. Graphes orientés

Définition 12.1 : Un *multigraphe orienté* est un couple $G = (V(G), A(G))$, ou, plus simplement $G = (V, A)$, où V est un ensemble fini non vide, où A est un ensemble fini, éventuellement vide, et tel que, dans le cas où A est non vide, il existe une application

$$\varphi : A \longrightarrow V \times V.$$

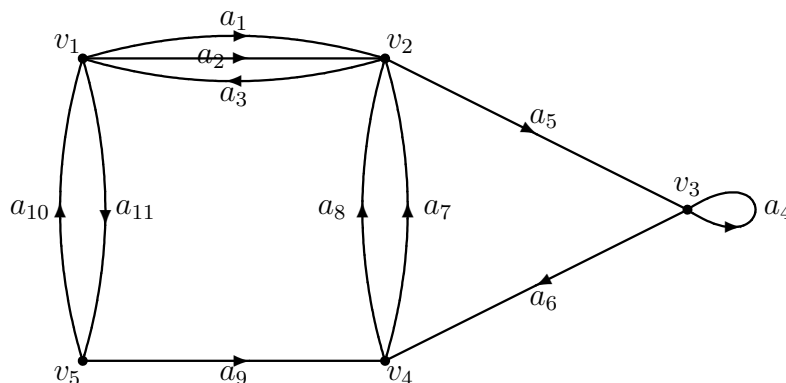
Les éléments de V sont appelés *sommets*. Les éléments de A sont appelés *arcs*. Soit a un élément de A , si $\varphi(a) = (u, v)$, on dit que a est un arc de u vers v .

On dit aussi que a est un *arc sortant* en u et est un *arc entrant* en v .

On dit que a est une *boucle*, s'il existe u dans V , tel que $\varphi(a) = (u, u)$.

Remarque : On retrouve les interprétations données au chapitre I, pour les applications et les relations binaires.

Exemple :



$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = (v_1, v_2),$$

$$\varphi(a_3) = (v_2, v_1),$$

$$\varphi(a_4) = (v_3, v_3).$$

Cas particulier : Si φ est injective (c'est-à-dire, si, pour tout couple de sommets (u, v) , il existe au plus un arc de u vers v), l'ensemble A est en bijection avec un sous-ensemble de $V \times V$, donc avec une relation binaire \mathcal{R} sur V .

Conséquences :

La relation \mathcal{R} est réflexive, si et seulement si on a une boucle en chaque sommet.

Si la relation \mathcal{R} est symétrique, on dit que le multigraphe orienté G est *symétrique* et on peut le considérer comme un multigraphe non orienté.

La relation \mathcal{R} est antisymétrique, si et seulement si, pour tout couple (u, v) de sommets de G , il existe au plus un arc, soit de u vers v , soit de v vers u . Dans ce cas, on dit que le graphe est *antisymétrique*.

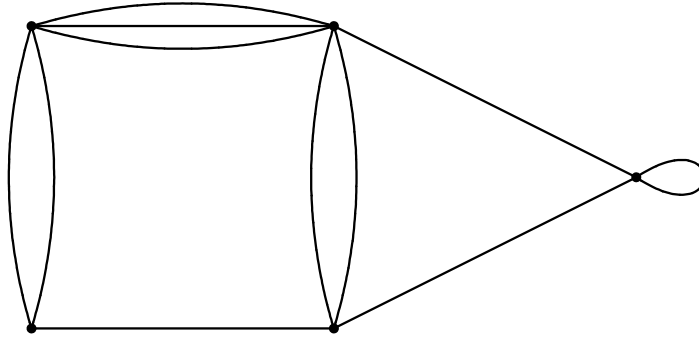
La relation \mathcal{R} est transitive, si et seulement si l'existence d'un arc de u vers v et d'un arc de v vers w implique l'existence d'un arc de u vers w . Dans ce cas, on dit que le multigraphe est *transitif*.

Définition 12.2 : Soit $G = (V, A)$ un multigraphe orienté, on dira que le multigraphe non orienté $G' = (V, E)$ est *associé* à G , s'il existe une bijection $f : A \rightarrow E$ et si, pour tout arc a de G , de u vers v , $f(a)$ est une arête de G' d'extrémités u et v .

Remarque : Le multigraphe non orienté G' associé à G est unique, à un isomorphisme près.

Exemple :

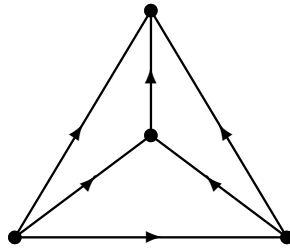
Le multigraphe G' suivant est associé au multigraphe orienté de l'exemple 12.1.

**Exemple classique de graphe orienté :**

Un *tournoi* est un graphe orienté $G = (V, A)$, dont le graphe non orienté associé est une clique.

Remarquons que l'application φ est alors injective et que la relation binaire \mathcal{R} , définie ci-dessus, est antisymétrique.

Tournoi d'ordre 4 :



Définition 12.3 : Soit $G = (V, A)$ un multigraphe orienté, d'ordre n . Notons $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. On appelle *matrice d'adjacence* de G , la matrice \mathcal{A} , carrée d'ordre n , de terme général a_{ij} où a_{ij} est le nombre d'arcs du sommet v_i au sommet v_j .

Exemple :

La matrice d'adjacence du multigraphe de l'exemple 12.1 est :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définitions 12.4 : Soit $G = (V, A)$ un multigraphe orienté et soit v un sommet de G , on appelle :

demi-degré extérieur de v , et on note $d^+(v)$, le nombre d'arcs sortants en v ,
et

demi-degré intérieur de v , et on note $d^-(v)$, le nombre d'arcs entrants en v .

Remarque : Pour tout sommet v de G , $d^+(v) + d^-(v)$ est le degré de v dans le multigraphe non orienté associé à G .

Théorème 12.5 : (*Théorème des coups de pieds*) Avec les notations de la définition 12.4, on a :

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |\mathcal{A}|,$$

où $|\mathcal{A}|$ désigne la somme des termes de la matrice d'adjacence \mathcal{A} de G .

Preuve : Notons $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. On a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d^+(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

$$|\mathcal{A}| = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n d^+(v_i),$$

et

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, d^-(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij},$$

$$|\mathcal{A}| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n d^-(v_j).$$

Corollaire : Soit m le nombre d'arcs de G . On a :

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = m.$$

En effet, $\sum_{v \in V} d^+(v) + \sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d(v) = 2m.$

Définitions 12.6 : Soit $G = (V, A)$ un multigraphe orienté.

1) On appelle *sous-graphe* de G , tout multigraphe orienté $H = (W, B)$, où W est un sous-ensemble non vide de V et où B est un sous-ensemble de A .

2) Soit W une partie non vide de V . Le *sous-graphe de G , engendré par W* est le multigraphe orienté $G_W = (W, B)$, où B est obtenu, à partir de A , en supprimant tous les arcs entrants ou sortants en un sommet de $V \setminus W$.

3) Un *graphe couvrant de G* est un sous-graphe de G , ayant le même ensemble de sommets que G .

Définitions 12.7 : Soit $G = (V, A)$ un multigraphe orienté et soit k un entier strictement positif.

Soit u et v des sommets, distincts ou non, de G , un k -chemin (ou *chemin de longueur k*) de G , de u à v , est une suite $(v_0, a_1, v_1, \dots, v_{k-1}, a_k, v_k)$, telle que :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, v_i \in V & \quad \text{et} \quad v_0 = u, v_k = v, \\ \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, a_i \in E & \quad \text{et} \quad a_i \text{ est un arc de } v_{i-1} \text{ vers } v_i. \end{aligned}$$

Les sommets v_0 et v_k sont respectivement appelés *extrémité initiale* et *extrémité finale* du k -chemin.

Si les arcs a_1, \dots, a_k sont distincts, on dit que le chemin est *simple*.

Si les sommets v_0, \dots, v_k sont distincts, on dit que le chemin est *élémentaire*.

Un chemin fermé est un chemin, dont les extrémités initiale et finale sont confondues.

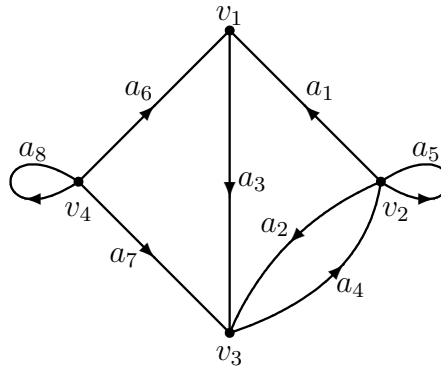
Soit u un sommet de G , on dit que (u) est un 0 -chemin de u à u .

Un k -circuit (ou *circuit de longueur k*) de G est un k -chemin fermé, simple.

Si les sommets v_1, \dots, v_k sont distincts, on dit que le circuit est *élémentaire*.

Soit G' le multigraphe non orienté, associé au multigraphe orienté G . Une chaîne de G' est appelée *chaîne* de G , un cycle de G' est appelé *cycle* de G .

Exemple : Dans le multigraphe orienté suivant,



$(v_2, a_1, v_1, a_3, v_3)$ est un 2-chemin.

$(v_1, a_3, v_3, a_2, v_2)$ est une 2-chaîne, pas un 2-chemin.

$(v_2, a_1, v_1, a_3, v_3, a_4, v_2)$ est un 3-circuit.

$(v_2, a_1, v_1, a_3, v_3, a_2, v_2)$ est un 3-cycle, pas un 3-circuit.

Remarque :

L'algorithme de Dijkstra s'étend à un multigraphe orienté $G = (V, A)$, dans le cas où l'application φ est injective, en remplaçant dans l'algorithme 6.8 :

E par A ,
 arête $\{v, w\}$ par arc (v, w) ,
 chaîne par chemin.

Définition 12.8 : On dit qu'un multigraphe orienté G est *fortement connexe*, si pour tout couple (u, v) de sommets de G , il existe un chemin de u à v .

Définition 12.9 : Soit $G = (V, A)$ un multigraphe orienté et soit \mathcal{R} la relation binaire sur V définie par:

$$u\mathcal{R}v \iff \exists \text{ un chemin de } u \text{ à } v \text{ et un chemin de } v \text{ à } u.$$

La relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur V . (La vérification est laissée au lecteur.)

Les sous-graphes de G , engendrés par les classes d'équivalence de la relation \mathcal{R} , sont appelées *composantes fortement connexes de G* .

Propriétés 12.10 :

- 1) Les classes d'équivalence forment une partition de V .
- 2) Toute composante fortement connexe est un multigraphe fortement connexe.
- 3) Le multigraphe G est fortement connexe, si et seulement s'il admet une seule composante fortement connexe.

Preuve :

1) C'est une propriété des relations d'équivalence.

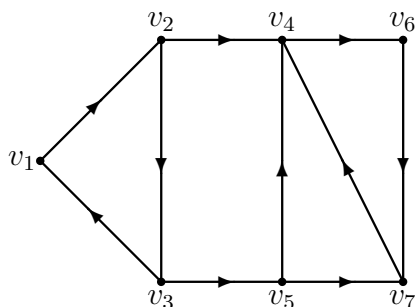
2) Soit H une composante fortement connexe de G et soit u et v des sommets de H . Il existe un chemin C de G , de u à v , et un chemin C' de G , de v à u . Pour tout sommet w de C , il existe un chemin C_1 (sous-chemin de C) de u à w et un chemin C_2 (sous-chemin de C) de w à v . La réunion $C_2 \cup C'$ est un chemin de w à u . On a ainsi prouvé que l'on a $w\mathcal{R}u$, donc que w est un sommet de H .

On en déduit que C est un chemin de H de u à v et de même C' est un chemin de H de v à u .

3) C'est une conséquence de la propriété 2) et de la définition de la relation \mathcal{R} .

Exemple :

Le graphe suivant admet 3 composantes fortement connexes engendrées respectivement par les ensembles $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_4, v_6, v_7\}$ et $\{v_5\}$:



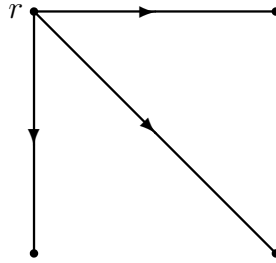
Définition 12.11 : Soit $G = (V, A)$ un multigraphe orienté.

Une *racine* de G est un sommet r de G tel que, pour tout sommet u de G , il existe un chemin de r à u .

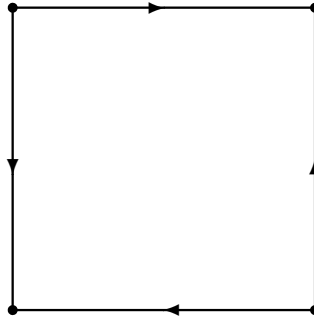
Un *puits* de G est un sommet p de G tel que, pour tout sommet v de G , il existe un chemin de v à p .

Exemple 1 : Tout sommet d'un multigraphe fortement connexe est à la fois racine et puits.

Exemple 2 : Le graphe suivant admet une racine unique, r , et n'admet pas de puits.



Exemple 3 : Le graphe suivant n'admet ni racine, ni puits.



Théorème 12.12 : Soit $G = (V, A)$ un multigraphe orienté d'ordre supérieur ou égal à 2. Un sommet r de G est une racine de G , si et seulement si, pour tout sous-ensemble W , non vide, de V , ne contenant pas r , il existe au moins un arc ayant son extrémité initiale dans $V \setminus W$ et son extrémité finale dans W .

Preuve :

Soit r une racine de G et soit v appartenant à W . Il existe un chemin C de r à v : $C = (v_0, a_1, \dots, a_k, v_k)$, avec $v_0 = r$ et $v_k = v$. L'ensemble $\{i \in \llbracket 1, k \rrbracket \mid v_i \in W\}$ contient k . C'est donc un ensemble d'entiers non vide, minoré. Il admet un plus petit élément i_0 , distinct de 0. Donc l'arc a_{i_0} a son extrémité initiale v_{i_0-1} dans $V \setminus W$ et son extrémité finale v_{i_0} dans W .

Réciproquement, Soit r un sommet de G , tel que, pour tout sous-ensemble W , non vide, de V , ne contenant pas r , il existe au moins un arc ayant son extrémité initiale dans $V \setminus W$ et son extrémité finale dans W .

Le multigraphe G étant d'ordre supérieur ou égal à 2, il existe au moins un sommet de G distinct de r . Pour tout sommet v de G distinct de r , notons W_v l'ensemble des sommets w , tels qu'il existe un chemin de w à v . Le sommet v appartient à W_v . Supposons que r n'appartienne pas à W_v . On aurait un arc a ayant son extrémité initiale u dans $V \setminus W_v$ et son extrémité finale w dans W_v . Il existerait un chemin de w à v , donc de u à v , ce qui serait contraire à la définition de W_v .

On en déduit que, pour tout sommet v , distinct de r , r appartient à W_v , donc que r est une racine de G .

Remarque : On montre de même le résultat suivant :

Soit $G = (V, A)$ un multigraphe orienté d'ordre supérieur ou égal à 2. Un sommet p de G est un puits de G , si et seulement si, pour tout sous-ensemble W , non vide, de V , ne contenant pas p , il existe au moins un arc ayant son extrémité initiale dans W et son extrémité finale dans $V \setminus W$.

Définition 12.13 : Une *arborescence* est un graphe orienté, admettant au moins une racine, et dont le graphe non orienté associé est un arbre.

Théorème 12.14 : Une arborescence admet une racine r unique et on a :

$$d^-(r) = 0, \text{ et } \forall u \neq r \ d^-(u) = 1.$$

Preuve: Rappelons qu'un arbre ne contient pas de chaîne fermée de longueur supérieure ou égale à 1. Il en est donc de même d'une arborescence.

Soit $G = (V, A)$ une arborescence.

1) Par définition, G admet au moins une racine. Supposons que G admette deux racines r et r' distinctes. Il existerait un chemin de r à r' , et un chemin de r' à r , dont la réunion serait une chaîne fermée de G , de longueur supérieure ou égale à 1. Le graphe G ne serait donc pas une arborescence.

On a ainsi prouvé que le graphe G admet une unique racine r .

2) Supposons : $d^-(r) \geq 1$. Il existerait un sommet v de G et un arc a de v à r . De plus, d'après la définition de racine, il existe un chemin C de r à v . La réunion C et de a serait un chemin fermé de G , de longueur supérieure ou égale à 1, donc une chaîne fermée de G , de longueur supérieure ou égale à 1, ce qui est exclu.

On en déduit que $d^-(r) = 0$.

3) Soit maintenant u un sommet de G distinct de r . D'après la définition de racine, on a : $d^-(u) \geq 1$. Supposons $d^-(u) \geq 2$. Il existerait deux sommets distincts v et w et deux arcs distincts a et a' de u vers v et de u vers w . De plus, il existe un chemin C de r vers v et un chemin C' de r vers w . La réunion de C , de C' , de a et de a' est une chaîne fermée de G , de longueur supérieure ou égale à 1, ce qui est exclu.

On en déduit que $d^-(u) = 1$.