2014-2015

LM371

Feuille d'exercices n°11

Exercice 1
Soit $K \rtimes_\varphi H$ un produit semi-direct. Calculer l'élément neutre et l'inverse d'un élément (k, h). Montrer que K et H sont respectivement isomorphes aux sous-groupes de G

$$\begin{aligned}\overline{K} &= \{(k, e_H) : k \in K\}\\ \overline{H} &= \{(e_K, h) : h \in H\}.\end{aligned}$$

Montrer que $\overline{K}$ est distingué dans $K \rtimes_\varphi H$ et que $\overline{KH} = K \rtimes_\varphi H$.

Exercice 2.
Montrer qu'un produit semi-direct $K \rtimes_\varphi H$ est direct si, et seulement si $\varphi : H \to Aut(K)$ est le morphisme trivial ($\forall h \in H, \varphi_h = id$).

Exercice 3.
On note R_n la rotation du plan de centre O, d'angle $2\pi/n$, et S la symétrie par rapport à l'axe (Ox).
a) Montrer que $S^2 = id$, $(R_n)^n = id$ et $R_n S = S R_n^{-1}$.
b) Montrer que le sous-groupe des isométries du plan engendré par R_n et S est de cardinal $2n$. On le note D_{2n} : c'est le groupe diédral d'ordre $2n$.
c) Montrer que D_{2n} conserve un polygone régulier à n côtés, centré en O et avec un sommet sur l'axe (Ox).
d) Soit $n \geq 2$. Montrer que $D_{2n} \backsimeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4
Montrer que S_n est un produit semi-direct de A_n et d'un groupe d'ordre 2.

Exercice 5
Soit n un entier positif et K un corps. Soit $SL_n(K)$ le sous-groupe de $GL_n(K)$ formé des endomorphismes de déterminant 1.
Montrer que $GL_n(K) = SL_n(K) \rtimes K^*$.

Exercice 6
a) Montrer que le groupe des quaternions n'est pas un produit semi-direct.
b) Montrer que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas un produit semi-direct.
c) Montrer que les groupes (tous de cardinal 8) $\mathbb{H}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et D_8 sont 2 à 2 non isomorphes.

Exercice 7.

Soit G un groupe non abélien d'ordre 12, et H un 3-Sylow de G.

a) Rappeler comment G agit par translation sur G/H. En déduire un homomorphisme de G dans l'ensemble des bijections de G/H.

Montrer que cet homomorphisme n'est pas injectif si et seulement si H est distingué dans G. En déduire que si H n'est pas distingué dans G, alors G est isomorphe à A_4.

b) On suppose que $H = \{1, a, a^2\}$ est distingué dans G. Montrer que si G admet un élément b d'ordre 4, alors $bab^{-1} = a^2$. Caractériser G dans ce cas.

c) On suppose toujours que H est distingué dans G, mais cette fois ci qu'il n'existe pas d'élément d'ordre 4. Compter le nombre maximal d'éléments d'ordre 2. En déduire qu'il existe un élement d'ordre 6 dans G, puis que G est isomorphe au groupe diédral D_{12}.

d) Faire la liste de tous les groupes (abéliens ou non) d'ordre 12, à isomorphisme près.

Exercice 8

Soit p et q deux nombres premiers. On suppose que $p < q$.

Soit G un groupe d'ordre pq.

a) Montrer que, si p ne divise pas $q-1$, G est cyclique.

On suppose désormais que p divise $q-1$.

b) Montrer que $Aut(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$. En déduire qu'il existe p homomorphismes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $Aut(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.

c) Montrer que G est cyclique ou est un produit semi-direct $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

d) Soit ϕ et ψ deux homomorphismes non triviaux de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $Aut(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe $\alpha \in Aut(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tel que $\psi = \phi \circ \alpha$. En déduire que tous les produits semi-directs de **c)** sont isomorphes.

Exercice 9

Montrer qu'un groupe d'ordre 255 est cyclique.