**Feuille 1 - Énoncés**

## Ensembles, tiroirs, récurrence

**Exercice 1** On considère la fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$u(0) = 1, \quad u(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}u(n) & \text{si } u(n) \text{ est pair,} \\ 5u(n) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $u$ n'est ni injective, ni surjective.

**Exercice 2**

a) Montrer que $(x, y) \mapsto 2^y(2x + 1) - 1$ définit une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. En déduire que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

On note $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

b) Montrer que $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ est dénombrable. On pourra considérer l'application $\psi$ qui à $A$ fait correspondre $\psi(A) = \sum_{\alpha \in A} 2^\alpha$.

c) Soit $\varphi$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. On définit l'ensemble

$$X = \{n \in \mathbb{N}; n \notin \varphi(n)\}$$

et $a = \varphi^{-1}(X)$. Est-ce que $a \in X$ ou non ? Déduire de ce qui précède que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

d) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

**Exercice 3**

a) Si on choisit 5 points dans un triangle équilatéral de côté 1, montrer qu'il existe au moins 2 points dont la distance est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

b) Combien suffit-il de choisir de points dans un triangle équilatéral de côté 1 pour qu'il en existe au moins 2 dont la distance est inférieure ou égale à $\frac{1}{n}$ ?

**Exercice 4** Montrer que, dans un ensemble de 12 entiers, il y en a 2 dont la différence est divisible par 11.

**Exercice 5** Soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des entiers tels que $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} \leq 2n$. Montrer qu'il existe $i$ et $j$, $1 \leq i < j \leq n + 1$, tels que $pgcd(a_i, a_j) = 1$.

**Exercice 6** Soit $n$ un entier premier à 10. Montrer que la suite des nombres $1, 11, 111, 1111, \ldots$ contient une infinité de multiples de $n$.

**Exercice 7** On colorie en bleu et rouge les points à coordonnées entières dans un plan. Montrer qu'il existe un rectangle dont tous les sommets sont de la même couleur.

**Exercice 8** On considère neuf points $(P_i)_{1 \leq i \leq 9}$ distincts à coordonnées entières dans l'espace à trois dimensions. Montrer qu'il existe une paire $\{i, j\}$ avec $i \neq j$ et un point $Q$ à coordonnées entières situé sur le segment ouvert $]P_i, P_j[$.

**Exercice 9** Soit $S = (x_1, \ldots, x_N)$ une suite finie de nombres réels distincts. On dit qu'une suite extraite $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ est *monotone croissante* si $x_{i_1} < \cdots < x_{i_k}$ et *monotone décroissante* si $x_{j_1} > \cdots > x_{j_k}$. Le but de cet exercice est de prouver que si $N = n^2 + 1$, alors soit il existe une suite extraite monotone croissante de longueur $n + 1$, soit il existe une suite extraite monotone décroissante de longueur $n + 1$.

Pour chaque indice $i$, notons $a_i \geq 1$ la longueur de la plus longue suite extraite croissante commençant par $x_i$ et $b_i \geq 1$ la longueur de la plus longue suite extraite décroissante commençant par $x_i$.

a) Montrer que l'application $i \mapsto (a_i, b_i)$ est injective.

b) Conclure.

c) Montrer que le théorème ne s'étend pas au cas $N = n^2$.

**Exercice 10** On veut démontrer pour tout entier $n \geq 1$ la propriété $P(n)$ suivante :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+,\ x_1 \cdots x_n \leq \frac{1}{n^n}(x_1 + \cdots + x_n)^n.$$

a) Montrer que $P(2)$ est vrai.

b) Montrer que $P(n)$ implique $P(n-1)$.

c) Montrer que $P(2)$ et $P(n)$ impliquent $P(2n)$ et conclure.

**Exercice 11** Soit $n$ droites du plan telles que deux droites quelconques soient concourantes et que trois droites quelconques ne le soient pas. Calculer le nombre de régions ainsi délimitées. Même question avec $n$ cercles deux à deux sécants, tels que trois cercles n'aient jamais de point commun.

## Coefficients binômiaux et multinomiaux

**Exercice 12** Si $X$ est un ensemble non vide, il a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair. Donner deux preuves de cette proposition, l'une calculatoire, l'autre combinatoire.

**Exercice 13** Exprimer en fonction de $n$ :

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$,

b) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$,

c) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

**Exercice 14** Soit $n$ un entier. Montrer que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

**Exercice 15** Soit $A$ et $B$ deux ensembles disjoints. Notons $a = |A|$, $b = |B|$ et $n = a + b$. Établir une bijection entre $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(A \cup B)$. En déduire que pour tout $p \geq 0$, on a

$$\binom{a+b}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}.$$

**Exercice 16** Soit $n$ un entier, montrer par récurrence

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

c) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} k\right)^2$.

**Exercice 17** Soient $E$ un ensemble de cardinal $n$, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ deux parties de $E$.

a) De combien de façons différentes peut-on choisir le couple $(A, B)$ ?

b) Combien existe-t-il de couples $(A, B)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ ?

c) Combien existe-t-il de couples $(A, B)$ tels que $A \cup B = E$ ?

d) Combien existe-t-il de couples $(A, B)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$ ?
On pose

$$S_1 = \sum_{X \subset E} |X|, \qquad S_2 = \sum_{X,Y \subset E} |X \cap Y|, \qquad S_3 = \sum_{X,Y \subset E} |X \cup Y|$$

e) Montrer que $S_1 = n2^{n-1}$.

f) Montrer que $S_2 = n2^{2n-2}$.

g) Établir la relation $S_2 + S_3 = 2^{n+1}S_1$. En déduire que $S_3 = 3n2^{2n-2}$.

**Exercice 18** Soit $p$ un nombre premier.

a) Montrer que pour tout $k \in [1..p-1]$, $\binom{p}{k}$ est un multiple de $p$.

b) Montrer par récurrence sur $n$ que, pour tout entier $n$, $n^p - n$ est un multiple de $p$.

c) En déduire le *petit théorème de Fermat* : Pour tout $n$ non divisible par $p$, le reste de la division de $n^{p-1}$ par $p$ est 1.

**Exercice 19** Combien de mots de 11 lettres peut-on écrire avec les lettres de MISSISSIPPI ?

**Exercice 20** Dans un couloir éclairé par 19 lampes, on veut en éteindre 3 pour faire des économies. On ne veut pas éteindre la première lampe ni la dernière, ni éteindre deux lampes consécutives. De combien de façons peut-on choisir les lampes à éteindre ? (Si $a$, $b$ et $c$ sont respectivement les numéros de la première, deuxième et troisième lampe éteinte, trouver les conditions que doivent vérifier $a' = a - 1$, $b' = b - 2$ et $c' = c - 3$ et en déduire le résultat). Donner la formule générale pour $k$ lampes à éteindre parmi $n$.

## Arrangements, combinaisons et permutations

**Exercice 21**

a) Quel est le nombre de suites contenant au moins un 6 qu'on peut obtenir en jetant dix fois de suite un dé ?

b) De combien de manières distinctes $n$ personnes peuvent-elles être positionnées dans une file ? et assises autour d'une table ?

c) Combien de mots de $n$ lettres (sans répétition) peut-on écrire avec l'alphabet $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de façon que $a_1$ et $a_2$ soient côte-à-côte ? et de façon que $a_1$ soit placé à gauche de $a_2$ ?

**Exercice 22** Soient $a_1, \ldots, a_n$ les $n > 3$ sommets d'un polygone convexe $P$ du plan. Une *diagonale* de $P$ est un segment $]a_i, a_j[$ qui n'est pas un côté de $P$. On suppose que trois diagonales quelconques ne sont pas concourantes.

a) Quel est le nombre $d_n$ de diagonales ?

b) Montrer que les diagonales se coupent en $t_n = \binom{n}{4}$ points.

c) Montrer que les diagonales découpent l'intérieur de $P$ en $d_n + t_n + 1$ régions.

d) En déduire le nombre de régions découpées en fonction de $n$.

**Exercice 23** On considère la figure formée dans l'exercice précédent par les côtés et les diagonales du polygone, et on veut compter le nombre $T_n$ de triangles qui apparaissent dans cette figure. Montrer qu'en prolongeant les côtés d'un de ces triangles on rencontre 3, 4, 5 ou 6 des sommets $a_i$. En déduire la formule

$$T_n = \binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + 5\binom{n}{5} + \binom{n}{6}.$$

**Exercice 24** Au jeu de bridge une *donne* est une répartition entre quatre joueurs (Sud, Ouest, Nord et Est) des 52 cartes d'un jeu, chaque joueur recevant 13 cartes.

a) Donner le nombre $D$ de donnes (distinctes).

b) Calculer le nombre $S$ de donnes dans lesquelles Sud a toutes ses cartes de la même couleur ?

c) Calculer le nombre $SO$ de donnes dans lesquelles Sud et Ouest ont tous deux des jeux unicolores ?

d) Exprimer en fonction de $S$ et de $SO$ le nombre $U$ de donnes dans lesquelles au moins un joueur a un jeu unicolore.

e) Une main de treize cartes est régulière si elle comporte quatre cartes d'une couleur et trois cartes de chacune des autres couleurs. Calculer le nombre $R$ de donnes dans lesquelles les quatre mains sont régulières.

**Exercice 25** Le poker est un jeu qui se joue avec les $4.13 = 52$ cartes classiques. Il y a quatre couleurs, et dans chaque couleur 13 valeurs qui sont, dans l'ordre décroissant : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. Une main est un sous-ensemble constitué de 5 de ces 52 cartes. On distingue 10 sortes de mains :

1. Les **quintes flush royales** sont les mains constituées d'un as, d'un roi, d'une reine, d'un valet et d'un 10 d'une même couleur.

2. Les **quintes flush** sont les mains constituées de cartes de la même couleur et dont les valeurs sont consécutives, mais qui ne forment pas une quinte flush royale.
3. Les **carrés** sont les mains qui contiennent quatre cartes de même valeur.
4. Les **full** sont les mains constituées de 3 cartes de même valeur associées à 2 cartes d'une même autre valeur, c'est-à-dire un brelan + une paire (voir ci-après).
5. Les **couleurs** sont les mains constituées de cartes de la même couleur, mais qui ne tombent dans aucune des catégories précédentes.
6. Les **suites** (ou quintes) sont les mains constituées de cartes dont les valeurs sont consécutives, mais qui ne tombent dans aucune des catégories précédentes.
7. Les **brelans** sont les mains comprenant 3 cartes d'une même valeur, mais qui ne tombent dans aucune des catégories précédentes.
8. Les **doubles-paires** sont les mains contenant une paire de deux cartes de même valeur $a$ et une autre paire de deux cartes de même valeur $b \neq a$, mais qui ne tombent dans aucune des catégories précédentes.
9. Les **paires** sont les mains contenant une paire de deux cartes de même valeur, mais qui ne tombent dans aucune des catégories précédentes.
10. Les **mains vides** sont toutes les autres mains.

Donnez le nombre de mains de chaque type.

## Formule du crible

**Exercice 26** Dans une classe de 67 élèves, 47 savent lire l'anglais, 35 l'allemand et 20 les 2.

a) Combien ne lisent aucune de ces 2 langues ?

De plus, 20 élèves lisent le russe, parmi lesquels 12 lisent également l'anglais, 11 l'allemand et 5 lisent ces 3 langues.

b) Combien d'élèves ne lisent aucune de ces 3 langues ?

**Exercice 27** Calculer le nombre d'entiers $n$, $1 \leq n \leq 1000$, qui ne sont divisibles ni par 5 ni par 7 ni par 13.

**Exercice 28** Parmi les entiers naturels compris entre 1 et 10000, combien y en a-t-il qui ne vérifient aucune des trois propriétés suivantes ?

- $n$ est divisible par 4.
- $n$ est divisible par 5.
- $n$ est un carré.

**Exercice 29** Déterminer le nombre de mots de longueur $n$ sur l'alphabet

$$\{a, b, c, d\}$$

où chaque lettre apparaît au moins une fois.

**Exercice 30** Un *dérangement* de l'ensemble $X$ est une permutation $\sigma$ de $X$ telle que $\forall x \in X,\ \sigma(x) \neq x$. Déterminer le nombre $D_n$ de dérangements de $[1, n]$. Si un grand nombre de personnes déposent leur sac au vestiaire et que chacun repart en reprenant un sac choisi au hasard, quelle est la probabilité pour que personne n'ait récupéré son propre sac ?