Feuille d'exercices n^{o} 5

Exercice 1. Soit E un ensemble.

1. Rappeler les axiomes qui donnent lieu à une relation d'équivalence $\sim$ sur E.
2. Rappeler la définition du quotient $E/\sim$.
3. Soit $\phi : E \longrightarrow F$ une fonction telle que, si $x \sim y$, alors $\phi(x) = \phi(y)$. Montrer que ϕ "passe au quotient": il existe une fonction
$$\overline{\phi} : E/\sim \longrightarrow F$$
telle que
$$\overline{\phi}(\text{classe de } x) = \phi(x).$$
4. Utiliser la question précédente pour construire une fonction
$$\overline{\phi} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^n = 1\}.$$
5. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On dira que $\overrightarrow{x} \sim \overrightarrow{y} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \in \mathbb{Z}\overrightarrow{e}_1$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. Trouver une bijection entre $E/\sim$ et le cylindre.[1]
6. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On dira que $\overrightarrow{x} \sim \overrightarrow{y}$ s'il existe une *matrice inversible* 2×2 A telle que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$. Montrer que $E/\sim$ possède seulement deux éléments.

Exercice 2. Vrai ou faux? Tout groupe fini est abelien.

Exercice 3. Montrer que les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont isomorphes.

Exercice 4. (Très important!) Soit G un groupe et $x \in G$. L'ordre de x, $\operatorname{ord} x$, est le plus petit entier positif n tel que $x^n = e$.
(a) Soit $n = \operatorname{ord}(x)$. Si $m \in \mathbb{Z}$ est tel que $x^m = e$, alors $n|m$.
(b) Soit $n = \operatorname{ord}(x)$. Montrer que $\#\{x^k : \ k \in \mathbb{Z}\} = n$.
(c) Montrer que l'ensemble $\#\{x^k : \ k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous–groupe de G.
(d) Soit G un groupe fini. Montrer que pour tout $x \in G$, $\operatorname{ord} x$ est fini.

Exercice 5. (a) Soit H un groupe abélien. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de H est un sous-groupe abélien de H.
(b) Quels sont les éléments d'ordre fini dans le groupe $\mathbb{C}^*$?

Exercice 6. Soit G un groupe, $g \in G$ un élément d'ordre n et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{ord} g^k = \frac{n}{\operatorname{pgcd}(n,k)}$.

Exercice 7. Soient G_1 et G_2 deux groupes finis. Soit (x, y) un élément du groupe $G_1 \times G_2$. Montrer que $\operatorname{ord}(x, y) = \operatorname{ppcm}(\operatorname{ord} x, \operatorname{ord} y)$.

Exercice 8. Traduire en termes d'homomorphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes :

[1] C'est le produit du cercle S^1 par la droite $\mathbb{R}$.

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
2. $\det(MM') = \det(M)\det(M')$;
3. $|zz'| = |z||z'|$;
4. $(xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;
5. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;
6. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

Exercice 9. (a) Soit $g \in G$ d'ordre fini et $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que l'ordre de $f(g)$ divise l'ordre de g.
(b) À l'aide de (a), montrer que les groupes multiplicatifs $\mathbb{R}^\times$ et $\mathbb{C}^\times$ ne sont pas isomorphes.