Corrigé rapide de l'examen

Exercice 1 (Lemme du $\partial\bar{\partial}$).

1. Ecrire $d = \partial + \bar{\partial}$ et développer $d^2 = 0$.
2. $\partial^*\bar{\partial} = i(\Lambda\bar{\partial} - \bar{\partial}\Lambda)\bar{\partial} = -i\bar{\partial}\Lambda\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial^*$.
3. $A^{p-1,q+1}$.
4. Si $\beta = \gamma + \Delta\eta$ avec γ harmonique, comme $\Delta_d = 2\Delta_{\bar{\partial}}$, on a $\bar{\partial}\gamma = 0$. Donc $\alpha = -2\partial^*\bar{\partial}\partial\eta + 2\bar{\partial}\partial\partial^*\eta$. Comme α et $\bar{\partial}\partial\partial^*\eta$ sont ∂-fermées (par la question 2) on a $\partial\partial^*\bar{\partial}\partial\eta = 0$. Mais $Im(\partial^*) \cap Ker(\partial) = 0$ donc $\partial^*\bar{\partial}\partial\eta = 0$ donc $\alpha = \bar{\partial}(2\partial\partial^*\eta)$.
5. Similaire.

Exercice 2. Tout cet exercice se résoud plus simplement dans la catégorie des fibrés vectoriels holomorphes, qui est équivalente à la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres, et l'équivalence préserve les quotients, produits tensoriels, déterminants, i^*. On utilise des lettres droites pour les fibrés vectoriels.

1. Vu en cours : il suffit de montrer que $T_Y \subset T_X|_Y = i^*(T_X)$ est un sous-fibré vectoriel. On prend des cartes (U_i, ϕ_i) de X telles $\phi_i(Y) = \mathbb{C}^k \times 0 \subset \mathbb{C}^{n-k}$. Alors $T_X|Y$ est donné par les cocycles $U_{ij} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $x \mapsto d_x(\phi_j^{-1} \circ \phi_i)$, mais ces matrices sont triangulaires supérieures par blocs, et dans le bloc en haut à gauche figure le cocycle de T_Y. Cqfd, et d'ailleurs on obtient dans le bloc inférieur droit les cocycles de $N_{Y/X}$.
2. On montre en introduisant les cocycles les deux fait suivants, qui suffisent à conclure. D'abord si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte courte de fibrés holomorphes sur X, alors la suite $0 \to C^* \to B^* \to A^* \to 0$ est exacte, où $*$ est le fibré $\mathbb{C}$-dual. Puis pour toute suite exacte courte de fibrés vectoriels $0 \to A \to B \to C \to 0$ on a un isomorphisme canonique $\det(B) = \det(A) \otimes \det(C)$. On rappelle que $\det(A) = \Lambda^{\mathrm{rg}(A)}A$. On note aussi que pour obtenir des isomorphismes canoniques, il faut vérifier que les constructions faites dans ce parapgraphe ne dépendent pas du choix des cocyles.
3. On oublie U des notations pour simplifier. Par fonctorialité du fibré tangent, on a des applications $df_i : T_X \to X \times \mathbb{C}$ vers le fibré trivial. On note toujours $df_i = df_i|_Y : T_X|_Y \to Y \times \mathbb{C}$ et $df = (df_1, \cdots, df_{n-k}) : T_X|_Y \to Y \times \mathbb{C}^{n-k}$ qui est un morphisme de fibrés holomorphes sur Y. On a par construction du fibré tangent à une sous-variété donnée par le lieu d'annulation de fonctions submersives que $T_Y = Ker(df)$. Donc $N_{Y/X} = Coker(df)$. Et $(N_{Y/X})^* = (T_X|_Y/Ker(df))^* = Ker(df)^\perp$, c'est à dire que pour tout $x \in Y$, l'espace vectoriel$N^*_{Y/X,x}$ consiste en les formes linéaires sur $T_{X,x}$ qui sont nulles sur $Ker(d_x f)$. Mais l'application linéaire $d_x f : T_{X,x} \to \mathbb{C}^{n-k}$ est donné par la famille de formes linéaires $d_x f_i$. On obtient donc bien la base des $d_x f_i$ de $N^*_{Y/X,x}$.

4. Dans cette question on conserve le point de vue des faisceaux (on peut prendre le carré d'un faisceau d'idéal, mais pas le carré d'un sous-fibré vectoriel !). Il suffit de dire que $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ agit trivialement sur $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2 = \mathcal{I}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$. On vérifie aussi dans le cadre de la question 3 que $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2$ est localement libre de rang $n-k$ sur Y. En effet sa restriction à U est égale à $\oplus_i \mathcal{O}_Y \cdot \bar{f}_i$ où $\bar{f}_i$ est la classe de $f_i \in \mathcal{I}_Y(U)$.

5. On considère le morphisme de faisceaux $\mathcal{I}_Y \to \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}_X, X \times \mathbb{C})$, $f \mapsto df$. Restreindre cette application de X à Y signifier dans le monde des faisceaux à tensoriser source et but par $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$. On obtient donc directement une application $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2 \to \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{T}_X, Y \times \mathbb{C})$, $f \mapsto df$ (moralement on peut dire que df ne dépend que de la classe de $f \in \mathcal{I}_Y$ dans $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2$, mais en vérité l'argument précédent montre que l'application $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2 \to \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{T}_X, Y \times \mathbb{C})$, $f \mapsto df$ est bien définie sans argument supplémentaire à donner). De plus d'après notre réponse à la question 3, l'image de cette application tombe dans $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y, Y \times \mathbb{C})$

   On est maintenant dans le cadre d'un morphisme $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2 \to \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y, Y \times \mathbb{C})$ de faisceaux localement libre qui est $\mathcal{O}_Y$-linéaire. On peut repasser aux fibrés pour vérifier que c'est un isomorphisme, puis passer aux fibres. On applique alors la question 3.

Exercice 3.

1. Le fibré tangent à $\mathbb{C}^n$ est $T_{\mathbb{C}^n} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, évidemment trivial. L'action par translation de Λ sur $\mathbb{C}^n$ est de différentielle l'identité, et on obtient donc que Λ agit sur le fibré $T_{\mathbb{C}^n}$ par la formule $\lambda \bullet (x, v) = (x + \lambda, v)$. Le champs de vecteurs tangent $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $x \mapsto (x, (1, 0, \cdots, 0))$ est holomorphe sans zéro et Λ-invariant. Il définit donc par quotient (car $T_X = T_{\mathbb{C}^n}/\Lambda$) un champ de vecteur tangent holomorphe sans zéro sur X. De même pour $e_2, \cdots, e_n$ en variant la position du 1. Donc T_X admet un repère, et est trivial. *On peut vérifier que le fibré tangent à tout groupe de Lie holomorphe (ie loi de groupe et inversion holomorphe) est trivial.*

2. Du coup le fibré cotangent holomorphe est trivial de rang n, le faisceau Ω_X^p est trivial de rang C_n^p, isomorphe à $\mathcal{O}_X^{C_n^p}$. Donc $H^q(X, \Omega_X^p) = H^q(X, \mathcal{O}_X)^{C_n^p}$. C'est compatible avec le calcul $h^{pq} = C_n^p C_n^q$ d'où $h^{0q} = C_n^q = \dim H^q(X, \mathcal{O}_X)$.

3. Comme $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est simplement connexe, une telle application se factorise en $g : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^n$. Comme $\pi : \mathbb{C}^n \to X$ est un biholomorphisme local (comme tout quotient dans le cas d'une action propre sans point fixe), on obtient que g est holomorphe. Mais le théorème de Liouville dit donc que g est constante.

4. Même argument !

Exercice 4.

1. On a $\mathbb{C}^2 - 0 = U \cup V$ et $U \cap V = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Aussi $U = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. On rappelle que les espaces Stein sont stables par produit, que $\mathbb{C}$ est Stein et que le lieu de non annulation d'une seule fonction holomorphe dans un Stein reste Stein (et si on veut, l'intersection d'ouverts Stein reste Stein). Ainsi $U, V, U \cap V$ restent

Stein et on peut calculer la cohomologie de $\mathcal{O}$ par à la Cech par ce recouvrement fixé. Il faut donc étudier le noyau et le conoyau de l'application

$$\Phi : \mathcal{O}(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \times \mathcal{O}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*),\ (f, g) \mapsto f - g$$

Le noyau est par définition $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2 - 0)$, ce qui n'apporte rien. Mais le principe d'Hartogs dit que cela est égal à $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$, dont on peut prouver qu'il consiste en les séries globalement développables en $\sum_{n,m\geq 0} a_{nm} z^n w^m$. On peut d'ailleurs conjecturer que $\mathcal{O}(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$ consiste en les séries globalement développables en $\sum_{n\in\mathbb{Z},m\geq 0} a_{nm} z^n w^m$ et de même pour $\mathcal{O}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)$, ce qui permet de prouver ce cas du principe d'Hartogs.

De même on conjecture naturellement que $\mathcal{O}(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$ consiste en les séries globalement développables en $\sum_{n\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}} a_{nm} z^n w^m$. Mais il est alors clair que

$$H^1(\mathbb{C}^2 - 0, \mathcal{O}) = Coker(\Phi) = \{ \sum_{n,m<0} a_{nm} z^n w^m \}$$

Ce n'est d'ailleurs pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, mais ce n'est pas une contradiction car $\mathbb{C}^2 - 0$ n'est pas compact.

2. $\mathbb{C}^2 - 0$ admet $\mathbb{S}^3$ comme rétract, et la cohomologie du faisceau $\underline{\mathbb{Z}}$ est égale à la cohomologie singulière à valeurs entières. On a donc que cette cohomologie est $\mathbb{Z}$ en degré 0 et 3, et nulle en les autres degrés.

3. Suite longue en cohomologie induit par la suite exacte courte exponentielle, avec bien sûr $Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ et $H^1(\mathbb{C}^2 - 0, \mathbb{Z}) = H^2(\mathbb{C}^2 - 0, \mathbb{Z}) = 0$.

4. Il suffit de reprendre les arguments précédents : le cocycle de Cech $1/zw \in H^1(\mathbb{C}^2 - 0, \mathcal{O})$ n'est pas cohomologue à 0. Par la suite exacte longue associée à la suite exacte courte exponentielle, le cocycle $e^{1/zw} \in H^1(\mathbb{C}^2 - 0, \mathcal{O}^*)$ est non trivial. On prend donc le fibré en droites holomorphe obtenu en recollant $\mathbb{C} \times U$ et $\mathbb{C} \times V$ par l'application $\mathbb{C} \times (U \cap V) \to \mathbb{C} \times (U \cap V)$, $(\lambda, (z, w)) \mapsto (\lambda \cdot e^{1/zw}, (z, w))$.

5. Comme avant. On trouve que $H^2(\mathbb{C}^3 - 0, \mathcal{O}) = \{\sum_{n,m,k<0} a_{nmk} z^n w^m v^k\}$ avec des généralisations évidentes en dimension supérieure. On a d'ailleurs par la suite longue exponentielle $Pic(\mathbb{C}^3 - 0) = 0$.