Examen

Sont autorisés : notes de cours, poly, notes de TD, dictionnaires. Sont interdits : autres documents, téléphones. *You can reply in English if you wish*

Exercice 1 (Lemme du $\partial\bar{\partial}$). Soit X une variété kählérienne compacte et $k \geq 0$.

1. Montrer que $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$ comme endomorphismes de $A^k(X)$.
2. Montrer que $\partial^*\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial^*$ comme endomorphismes de $A^k(X)$.
   On pourra utiliser l'identité $\partial^* = i[\Lambda, \bar{\partial}]$
3. Quel la bigraduation de l'image de $A^{pq}(X)$ par $\partial^*\bar{\partial}$ lorsque $k = p + q$?
4. Soit $\alpha \in A^k(X)$ vérifiant $\partial\alpha = \bar{\partial}\alpha = 0$ et $\alpha \in \mathrm{Im}(\bar{\partial})$. Montrer qu'il existe $\gamma \in A^{k-2}(X)$ tel que $\alpha = \partial\bar{\partial}\gamma$.
   On pourra écrire $\alpha = \bar{\partial}\beta$ *et décomposer* $\beta = \gamma + \Delta\eta$ *avec* γ *harmonique.*
5. Prouver de même que si $\partial\alpha = \bar{\partial}\alpha = 0$ et ($\alpha \in \mathrm{Im}(\partial)$ ou $\alpha \in \mathrm{Im}(d)$) alors il existe $\gamma \in A^{k-2}(X)$ tel que $\alpha = \partial\bar{\partial}\gamma$.

Exercice 2 Soit X une variété complexe de dimension n. On note $\mathcal{K}_X = \Omega^n_X$ le faisceau des n-formes différentielles holomorphes sur X, et on note $\mathcal{T}_X$ le faisceau des vecteurs tangents holomorphes sur X.

1. Soit $i : Y \subset X$ une sous-variété. Vérifier que $\mathcal{T}_Y \subset i^*\mathcal{T}_X$ est un sous-faisceau.
   On note alors $\mathcal{N}_{Y/X} = i^*(\mathcal{T}_X)/\mathcal{T}_Y$ le faisceau quotient et on l'appelle faisceau conormal à Y dans X.
2. Montrer que les faisceaux $\mathcal{K}_Y$ et $i^*(\mathcal{K}_X) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \det(\mathcal{N}_{Y/X})$ sont canoniquement isomorphes.
3. Supposons que $U \subset X$ est un ouvert, que $f_1, \cdots, f_{n-k} : U \to \mathbb{C}$ sont holomorphes, que $f = (f_1, \cdots, f_{n-k}) : U \to \mathbb{C}^{n-k}$ est submersive dans le sens de la géométrie différentielle, et que $Y \cap U = f^{-1}(0, \cdots, 0)$. Soit $x \in Y \cap U$. Notons $\pi : N_{Y/X} \to X$ le fibré vectoriel holomorphe de faisceaux des sections $\mathcal{N}_{Y/X}$ et $N_{Y/X,x} = \pi^{-1}(x)$.

   Montrer que $f_1, \cdots, f_{n-k}$ induisent une base naturelle de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(N_{Y/X,x}, \mathbb{C})$
4. Notons $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ le faisceau d'idéaux des fonctions holomorphes sur X identiquement nulles sur Y. Vérifier que $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2$ est un faisceau de $\mathcal{O}_Y$-modules.
5. Montrer qu'il existe un isomorphisme canonique de faisceaux

$$\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}_{Y/X}, \mathcal{O}_Y) = \mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2$$

Exercice 3. Soit $X = \mathbb{C}^g/\Lambda$ un tore complexe.

1. Prouver que le fibré tangent holomorphe à X est trivial.
2. Vérifier que cela est compatible avec le calcul des $h^{pq}(X)$.
3. Montrer que toute application holomorphe de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dans X est constante.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, toute application holomorphe de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ dans X est constante.

Exercice 4. On rappelle que si $\mathbb{S}^n$ désigne la sphère réelle de dimension n, on a $H^k(\mathbb{S}^n, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$ si $k \notin \{0, n\}$ et est égal à $\mathbb{Z}$ sinon.
On rappelle aussi le principe d'Hartogs qui garantit que toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^2 - (0,0)$ s'étend de manière holomorphe à $\mathbb{C}$.

1. Calculer $H^k(\mathbb{C}^2 - (0,0), \mathcal{O})$ pour tout $k \geq 0$ à la Cech en utilisant le recouvrement par les ouverts $U = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \neq 0\}$ et $V = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w \neq 0\}$.
   On pourra dégager un énoncé de nature analytique sur les fonctions holomorphes sur $(\mathbb{C}^*)^2$, et l'admettre
2. Calculer $H^k(\mathbb{C}^2 - (0,0), \underline{\mathbb{Z}})$ pour tout $k \geq 0$.
3. Montrer que $\mathrm{Pic}(\mathbb{C}^2 - (0,0)) = H^1(\mathbb{C}^2 - (0,0), \mathcal{O})$.
4. Décrire explicitement un fibré en droites holomorphe sur $\mathbb{C}^2 - (0,0)$ qui n'est pas trivialisable.
5. Montrer que $H^1(\mathbb{C}^3 - (0,0,0), \mathcal{O}) = 0$.