Sujets d'exposés

Les difficultés prévues des exposés sont indiquées par le nombre d'étoile.

Exposé 1. Un préfaisceau sans faisceautisé(**)

Il s'agit d'expliquer le contenu de l'article de Waterhouse Basically bounded functors and flat sheaves, Pacific J. Math, vol 57 no 2 pp 597-610 (trouvable sur internet en libre accès). On se focalisera notamment sur le théorème 5.5 qui fournit un préfaisceau fpqc sans faisceautisé.

Cet exposé est de goût assez catégorique ; il faut quelques connaissances sur les cardinaux transfinis.

Exposé 2. Le w-localisé(**)

Le but de cet exposé est d'expliquer la construction du w-localisé d'un schéma donné dans l'article de Bhatt-Scholze, jusqu'au lemme 2.2.4 inclus. On commencera par les rudiments nécessaires de topologie spectrale (Stack project section 5.23 part 1, Spectral spaces). On essayera notamment de donner des exemples : comment écrire $Spec(\mathbb{Z})$ comme limite projective d'espace T_0 finis ?

Exposé 3. Hensélisés et schémas w-strictement locaux(*)

On expliquera comment fabriquer des schémas w-strictement locaux, dont tous les recouvrements étales scindent (étant donné acquis l'existence de schémas w-locaux dont les recouvrement Zariski scindent). Il faudra commencer par rappeler la notion classique d'anneau hensélien et strictement hensélien, et la construction de l'hensélisé (strict ou pas) de l'anneau local d'un schéma. Référence Néron Models de Bosch-Lutkebohmert-Raynaud par.2.2. On suivra ensuite Stack Project paragraphe 8 Constructing Ind-étale algebras du chapitre Pro-étale cohomology.

Exposé 4. Compactification de Stone-Cech(***)

On construira la compactification de Stone-Cech d'un espace topologique. On pourra soit utiliser les ultra-filtres, en faisant tous les rappels nécessaires. Ou alors définir cette compactification comme l'espace topologique Spec(Cont(X,k)) pour tout corps k. Cf par exemple le livre Rings of continous functions de Gillman et Jerison que je peux fournir. Une difficulté de cet exposé sera de trouver des références bibliographiques.

Exposé 5. Faisceaux étales et cohomologie galoisienne(*)

Il s'agit d'expliquer l'équivalence de catégorie entre les faisceaux étales sur Spec(k) et les représentations continues de $Gal(k^{\text{sep}}/k)$ sur des ensembles munis de la topologie discrète, pour tout corps k. Dans un second temps on montrera que la cohomologie étale de Spec(k) à valeurs dans un tel faisceau en groupes coïncide avec la cohomologie galoisienne du $Gal(k^{\text{sep}}/k)$ -module correspondant.

Il s'agit d'un exposé classique, les références sont à trouver dans Stack project ou les livres de références sur la cohomologie étale.

Exposé 6. Faisceaux pro-étales et cohomologie galoisienne continue(*)

Cet exposé se place sur le site pro-étale d'un corps. On expliquera le lien entre les espaces

topologiques munis d'une action continue de $Gal(k^{\text{sep}}/k)$ et les faisceaux sur $Spec(k)_{\text{proet}}$ – le point de vue condensé aide bien sûr. On détaillera notamment l'exemple 4.1.10 de l'article de Bhatt-Scholze, en introduisant la notion de \underline{G} -torseur. On reliera ensuite la cohomologie galoisienne continue et la cohomologie pro-étale, cf Stack project paragraphe 22 Cohomology of a point du chapitre Pro-étale cohomology.

Exposé 7. L'autre site pro-étale(**).

Il s'agit d'introduire une définition alternative du site pro-étale, c'est à dire d'exposer la partie 3 de l'article p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties de Scholze (en faisant attention aux subtilités de l'erratum). On finira en expliquant la remarque 4.1.11 de l'article de Bhatt-Scholze.

Exposé 8. Faiceaux pro-étales et cohomologie continue(***)

Il s'agit d'expliquer le paragraphe 4.3 de l'article de Bhatt-Scholze. Le but est étant donné un groupe profini G d'introduire un site $BG_{\rm proet}$ dont la catégorie de faisceaux contient la catégorie des G-espaces topologiques munis d'une action continue.

Le plus difficile est alors de dégager des conditions précises permettant de relier la cohomologie continue de G et la cohomologie du site BG_{proet} , cf le délicat lemme 4.3.9 de Bhatt-Scholze.

Exposé difficile. Le lien pourra être fait avec l'exposé 3, et on pourra librement utiliser les résultats de l'exposé 4.

Exposé 9. Opérations sur les faisceaux pro-étales(**)

On exposera les paragraphes 23 (functoriality of the pro-étale site), 24, 25, 26 du chapitre Pro-étale Cohomology de Stack project. Cela vise à définir les opérations usuelles $(f_*, f^*, \text{ etc})$ sur les faisceaux pro-étales. On tentera notamment d'expliquer ce qui change par rapport au formalisme cohomologique étale usuel.

Exposé 10. Complétions dérivées(**)

Cet exposé nécessite de connaître les catégories dérivées. On exposera la notion de complétion dérivée d'un complexe en suivant les parapgraphes 20 et 21 du chapitre Proétale cohomology de Stack project. On expliquera ensuite pourquoi ces complétions dérivées se comportent simplement dans le site pro-étale, en comparant avec le cas du site étale.

Exposé 11. Le groupe fondamental pro-étale(***)

On expliquera le chapitre 7 de l'article de Bhatt-Scholze, en rappellant très brièvement la construction classique du groupe fondamental étale.