COHOMOLOGIE RELATIVE DES FORMES CUSPIDALES

par

Benoît Stroh

Résumé. — Nous montrons de manière élémentaire que les formes cuspidales n'ont pas de cohomologie relative supérieure lorsqu'on les projette d'une compactification toroïdale vers la compactification minimale d'une variété de Shimura en caractéristique nulle ou assez grande.

Abstract. — We show in an elementary way that cuspidal forms have no higher relative cohomology when they are projected from a toroïdal compactification to the minimal compactification of a Shimura variety in characteristic zero or big enough.

Dans cette note, nous proposons une démonstration élémentaire du théorème suivant. Elle résulte d'une discussion vietnamienne avec Hélène Esnault, que nous remercions vivement. Je remercie Peter Scholze de m'avoir signalé une erreur dans une version antérieure. L'auteur a bénéficié du projet ANR-10-BLAN 0114 ArShiFo pendant la préparation de cet article.

Soit X_E une variété de Shimura définie sur son corps réflexe E qui est une extension finie de $\mathbb{Q}$. D'après [**Pi**], il existe une compactification minimale X_E^* et une compactification toroïdale $\bar{X}_E$ définies sur E. Le schéma X_E^* est par construction projectif muni d'un faisceau ample ω_E. Il existe par ailleurs un morphisme propre $\pi_E : \bar{X}_E \to X_E^*$ qui est un isomorphisme sur X_E. Quitte à bien choisir la combinatoire dont dépend la compactification toroïdale, on peut supposer que $\bar{X}_E$ est lisse sur E, que le bord réduit D_E de X_E dans $\bar{X}_E$ est un diviseur à croisements normaux et que $-D_E$ est relativement ample pour π_E. On dispose enfin de l'isomorphisme de Kodaira-Spencer qui garantit l'existence d'un entier n tel que $\mathcal{K}_{\bar{X}_E}(\log(D_E)) \xrightarrow{\sim} \pi_E^*(\omega^{\otimes n})$ où $\mathcal{K}_{\bar{X}_E}(\log(D))$ est le faisceau dualisant logarithmique de $\bar{X}_E$.

Notons $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers de E et Δ le discriminant de E sur $\mathbb{Q}$. Soit $\mathrm{Spec}(k)$ un point de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_E[1/\Delta])$. Lorsque k est de caractéristique nulle, on notera $\mathcal{O}_k = k$ et lorsque k est de caractéristique positive, on notera $\mathcal{O}_k = W(k)$ les vecteurs de Witt. On suppose que X_E, X_E^*, $\bar{X}_E$, D_E et π_E admettent un modèle X, X^*, $\bar{X}$, D et π sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$. On demande que X^* soit projectif et que π soit un isomorphisme sur X. On demande aussi que $\bar{X}$ soit lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$, que le complémentaire réduit D de X dans $\bar{X}$ soit un diviseur à croisements normaux relatif sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ et que $-D$ soit relativement ample pour π. On demande enfin que l'isomorphisme de Kodaira-Spencer s'étende en un isomorphisme $\mathcal{K}_{\bar{X}}(\log(D)) \xrightarrow{\sim} \pi^*(\omega^{\otimes n})$.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14K10, 14G35, 14G17, 32L20.

Mots clefs. — vanishing theorem, toroidal compactification, minimal compactification, cuspidal forms.

Lorsque k est de caractéristique nulle, l'existence de tels modèles est tautologique. En caractéristique positive, de tels modèles ont été construits dans [**La**] lorsque X est PEL et v est une place de bonne réduction pour X.

Théorème 1. — *Si la caractéristique de k est non nulle, on suppose qu'elle est supérieure ou égale à la dimension de X_E. On a $\mathrm{R}^q\, \pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}(-D) = 0$ sur $X^* \times \operatorname{Spec}(k)$ pour tout $q > 0$.*

Ce théorème a été prouvé dans [**AIP**] pour les variétés de Siegel grâce à une analyse explicite des compactifications. Leur démonstration est plus compliquée que la nôtre mais a l'avantage d'être valable en toute caractéristique. Ce théorème sera également démontré dans [**HLTT**] pour des variétés de Shimura PEL générales. Il est utilisé dans plusieurs travaux récents ([**AIP**], [**ERX**] et [**PS**] en caractéristique positive, [**HLTT**] et [**TX**] en caractéristique nulle).

Commençons par prouver l'énoncé suivant, qui est une version faible du théorème d'annulation relative de Grauert-Riemenschneider valable en caractéristique non nulle p.

Proposition 2. — *Soit K un corps parfait de caractéristique p et $f : Z \to Y$ un morphisme birationnel entre schémas propres sur $\operatorname{Spec}(W_2(K))$ où $W_2(K)$ désigne les seconds vecteurs de Witt de K. On suppose Y projectif et Z lisse sur $\operatorname{Spec}(W_2(K))$. On suppose qu'il existe un diviseur à croisements normaux relatif D dans Z dont l'opposé est relativement ample pour f. On suppose $p \geq \dim(Z)$. Alors si $\mathcal{K}_Z$ désigne le faisceau dualisant de X, on a $\mathrm{R}^q f_{1,*}(\mathcal{K}_Z) = 0$ pour tout $q > 0$ où $f_1 = f \times \operatorname{Spec}(K)$ est la réduction modulo p de f.*

Démonstration. — On designe par Z_1, Y_1 et f_1 les réductions sur $\operatorname{Spec}(K)$. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau ample sur Y. Par hypothèse, $\mathcal{O}_X(-D)$ est relativement ample pour f. D'après EGA II, prop.4.6.13.ii, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$ le faisceau $f^*\mathcal{L}^n(-D)$ soit ample sur Z. D'après la forme logarithmique du théorème d'annulation de Kodaira-Raynaud [**DI**, 2.8 et 4.2], qui utilise l'existence d'un relèvement à $W_2(K)$ et l'hypothèse $p \geq \dim(Z)$, on a

$$\mathrm{H}^q(Z_1,\, \mathcal{K}_Z(\log(D)) \otimes f^*\mathcal{L}^n(-D)) \;=\; 0$$

pour tout $q > 0$. Donc

$$\mathrm{H}^q(Z_1,\, \mathcal{K}_Z \otimes f^*\mathcal{L}^n) \;=\; 0$$

pour tout $q > 0$. Choisissons $n > n_0$ tel que

$$\mathrm{H}^p(Y_1,\, \mathrm{R}^q f_{1,*}\, \mathcal{K}_Z \otimes \mathcal{L}^n) \;=\; 0$$

pour tout $p > 0$ et $q \geq 0$; c'est possible d'après le critère d'amplitude de Serre. Par la suite spectrale de Leray, on a donc

$$\mathrm{H}^0(Y_1,\, \mathrm{R}^q f_{1,*}\, \mathcal{K}_Z \otimes \mathcal{L}^n) \;=\; \mathrm{H}^q(Z_1,\, \mathcal{K}_Z \otimes f^*\mathcal{L}^n) \;=\; 0$$

pour tout $q \geq 0$. Choisissons n encore plus grand pour que $\mathrm{R}^q f_{1,*}\, \mathcal{K}_Z \otimes \mathcal{L}^n$ soit engendré par ses sections globales sur Y_1 pour tout $q > 0$. On en déduit que $\mathrm{R}^q f_{1,*}\, \mathcal{K}_Z \otimes \mathcal{L}^n = 0$ donc que $\mathrm{R}^q f_{1,*}(\mathcal{K}_Z) = 0$. $\square$

On en déduit par un procédé habituel que pour tout corps K de caractéristique nulle, tout morphisme $f : Z \to Y$ birationnel entre schémas propres sur $\operatorname{Spec}(K)$ et tout diviseur à croisement normaux $D \subset Z$ d'opposé ample pour f, on a $\mathrm{R}^q f_*\, (\mathcal{K}_Z) = 0$ pour tout $q > 0$. Ce dernier énoncé est un cas particulier du théorème d'annulation relative de Grauert-Riemenschneider [**GR**], qui prédit que pour tout morphisme $f : Z \to Y$ birationnel entre schémas propres sur $\operatorname{Spec}(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{R}^q f_*\, (\mathcal{K}_Z) = 0$ pour tout $q > 0$. Il n'est pas clair que le théorème de Grauert-Riemenschneider reste vrai en caractéristique positive, même assez grande et même si les objets se relèvent aux seconds vecteurs de Witt [**EV**].

Démonstration du théorème 1. — Des dévissages habituels permettent de supposer que k est de caractéristique positive. Il existe alors par hypothèse des objets X, X^*, $\bar{X}$, D et π sur $W_2(k)$. La proposition 2 montre que $\mathrm{R}^q\pi_*\mathcal{K}_{\bar{X}} = 0$ sur $X^* \times \mathrm{Spec}(k)$ pour tout $q > 0$. Mais $\mathcal{K}_{\bar{X}} = (\pi^*\omega^{\otimes n})(-D)$ par l'isomorphisme de Kodaira-Spencer. On trouve par la formule de projection que $\omega^n \otimes \mathrm{R}^q\pi_*\mathcal{O}_{\bar{X}}(-D)$ est nul sur $X^* \times \mathrm{Spec}(k)$ pour tout $q > 0$ et il en est de même pour $\mathrm{R}^q\pi_*\mathcal{O}_{\bar{X}}(-D)$. $\square$

Références

[AIP] F. Andreatta, A. Iovita et V. Pilloni – *p-adic families of Siegel modular cusforms*, à paraître à Annals of Mathematics (2013).

[DI] P. Deligne et L. Illusie – *Relèvement modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Inventiones Math. **89**, p. 247-270 (1987).

[ERX] M. Emerton, D. Reduzzi et L. Xiao – *Galois representations and torsion in the coherent cohomology of Hilbert modular varieties*, prépublication (2013).

[EV] H. Esnault et E. Viehweg – *Lectures on Vanishing Theorems*, DMV Seminar, Band 20, Birkhäuser (1992).

[GR] H. Grauert et O. Riemenschneider – *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Raümen*, Inventiones Math. **11**, p. 263-292 (1970).

[HLTT] M. Harris, K.W. Lan, R. Taylor et J. Thorne – *article en préparation* (2013).

[La] K.W. Lan – *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties*, London Mathematical Society Monographs, vol. 36, Princeton University Press, Princeton (2013).

[PS] V. Pilloni et B. Stroh – *Surconvergence, ramification et modularité*, prépublication (2013).

[Pi] R. Pink – *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties*, Bonner Mathematische Schriften 209 (1990).

[TX] Y. Tian et L. Xiao – *p-adic cohomology and classicality of overconvergent Hilbert modular forms*, prépublication (2013).

30 juillet 2013

Benoît Stroh • *Courriel :* `stroh@math.univ-paris13.fr`, C.N.R.S, Université Paris 13, LAGA, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse France