Mémoire d'habilitation à diriger des recherches
Université Paris 13

Mention : Mathématiques

École doctorale Erasme

présenté par

Benoît Stroh

soutenu le 10 décembre 2014

Cohomologie des variétés de Shimura

Composition du jury :

Pascal Boyer	Université Paris 13
Jean-Marc Fontaine	Université Paris 11
Alain Genestier	Université de Nancy
Gérard Laumon	Université Paris 11
Jacques Tilouine	Université Paris 13
Jean-Pierre Wintenberger	Université de Strasbourg

Rapporteurs :

Michael Harris	Université Paris 7
Ngô Bao Châu	Université de Chicago

Table des matières

1. Introduction

Mes recherches portent sur divers aspects de la cohomologie des variétés de Shimura et de leurs compactifications. Par cohomologie, on entend aussi bien cohomologie étale ℓ-adique que cohomologie cohérente.

Les aspects ℓ-adiques concernent principalement l'étude des cycles proches dans le cas de mauvaise réduction de type iwahorique ou pro-p-iwahorique. Nous étudions le comportement de ces cycles proches au bord de compactifications construites dans [**St1**], [**St2**] et [**St6**]. La philosophie est que ce comportement est le meilleur possible et que les divers prolongements des cycles proches au bord peuvent s'étudier par récurrence sur le rang du groupe associé à la variété de Shimura ([**St5**] et [**St6**]). D'autres aspects ℓ-adiques ont trait à la théorie du modèle local en niveau pro-p-iwahorique et à la géométrisation de centre de l'algèbre de Hecke correspondante. Ils ont été obtenu en collaboration avec Haines [**HS**].

Les aspects cohérents concernent tout d'abord les sections de fibrés automorphes sur les variétés de Shimura, c'est à dire les généralisations des formes modulaires. Je me suis intéressé à des questions de relèvement de telles sections de la caractéristique p à la caractéristique nulle ([**St3**] et [**St4**]). J'ai également étudié les formes modulaires p-adiques, qui sont des sections de fibrés automorphes définies sur une zone restreinte de la variété de Shimura rigide, et j'ai cherché à établir des résultats de classicité de telles formes ([**St4**] puis [**PS2**] et [**PS3**] en collaboration avec Pilloni). Ces recherches ont mené à l'étude de quelques généralisations de la théorie du sous-groupe canonique ([**PS1**] avec Pilloni). Dans le cas spécial des formes de poids un sur les variétés de Hilbert, un tel énoncé de classicité a des applications à la conjecture d'Artin, d'après Taylor ([**PS4**], toujours en collaboration avec Pilloni). J'ai ensuite étudié les images directes supérieures des faisceaux automorphes entre compactification toroïdale et minimale des variétés de Shimura ([**St7**] puis [**LS**] en collaboration avec Lan). J'ai enfin déduit de travaux récents de Scholze qu'on pouvait associer des représentations galoisiennes aux classes de cohomologie cohérente propres pour les opérateurs de Hecke ([**PS5**] en collaboration avec Pilloni).

Les mathématiques sont une activité qui se pratique mieux à plusieurs. Mes remerciements les plus chaleureux vont donc aux nombreuses personnes avec lesquelles j'ai eu le plaisir de travailler depuis des années. Mon collaborateur de toujours, Vincent Pilloni, occupe bien sûr une place de choix dans cette liste. Il en est de même de mes autres collaborateurs : Tom Haines et Kai Wen Lan. Je n'oublie pas Alain Genestier qui m'a tant apporté durant mon doctorat et Christophe Soulé qui m'a initié à la recherche. Je dois beaucoup à mes collègues de l'Université Paris 13, dont notamment Pascal Boyer, Farrell Brumley, Farid Mokrane, Cédric Pépin et Jacques Tilouine, avec leur énergie à organiser sans répit conférences et groupes de travail. Merci également à Fabrizio Andreatta, Gaëtan Chenevier, Pierre Colmez, Jean-François Dat, Gabriel Dospinescu, Laurent Fargues, Toby Gee, Wushi Goldring, Michael Harris, Adrian Iovita, Vincent Lafforgue, Ngô Bao Châu, Sophie Morel, Yichao Tian et Jack Thorne pour de longues discussions. Je remercie aussi mes élèves, dont notamment Stéphane Bijakowski et Liu Shi Nan pour tout ce qu'ils m'apportent, même s'ils ne s'en rendent pas forcément compte. Je remercie Philippe Souplet, Lionel Schwartz et Farrell Brumley pour leur précieuse aide administrative.

Je remercie enfin toutes les personnes qui ont accepté de faire partie du jury de cette habilitation, dont notamment Jean-Marc Fontaine, Gérard Laumon et Jean-Pierre Wintenberger. Mes derniers remerciements vont à Michael Harris et Ngô Bao Châu qui ont accepté la tâche ingrate de rapporter ce travail dans des délais très serrés.

2. Compactifications de variétés de Shimura

Mes premières recherches, initiées dans ma thèse dirigée par Alain Genestier, ont porté sur les compactifications de variétés de Shimura, notamment en certaines places de mauvaise réduction.

2.1. Compactification toroïdales en niveau iwahorique. — Soit p un nombre premier et g un entier. Notons $X_0(p)$ le champ de Deligne-Mumford sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ paramétrant les variétés abéliennes principalement polarisées A munies d'un drapeau de sous-groupes finis et plats $0 = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{2g} = A[p]$ tels que H_i soit de rang p^i et que $H_{g+i} = H_{g-i}^{\perp}$ pour tout $0 \leq i \leq g$. C'est donc le champ de Siegel de genre g et de niveau iwahorique en p. Il est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$ mais pas sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et n'est de toute manière pas propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Faltings et Chai **[FC]** ont construit des compactifications toroïdales $X_0(p)^{tor}_{\mathbb{Z}[1/p]}$ de $X_0(p) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$ dépendant de certains choix combinatoires.

Ma première tâche a été d'étendre leur construction en une compactification $X_0(p)^{tor}$ de $X_0(p)$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Bien sûr, construire des compactifications n'est une question difficile que si l'on leur impose de satisfaire certaines propriétés fines. Dans notre cas, le voisinage étale d'une strate de bord de $X_0(p)_{\mathbb{Z}[1/p]}$ fait intervenir une fibration

$$(\mathbf{2.1}.\mathrm{A}) \qquad \mathcal{M}_0(p)^{tor}_{\mathbb{Z}[1/p]} \to \mathcal{B}_0(p)_{\mathbb{Z}[1/p]} \to \mathcal{A}_0(p)_{\mathbb{Z}[1/p]}$$

où, pour un certain entier $1 \leq r \leq g$ appelé rang de la strate de bord, $\mathcal{A}_0(p)_{\mathbb{Z}[1/p]}$ est l'analogue exact de $X_0(p)_{\mathbb{Z}[1/p]}$ mais en genre $g - r$, où $\mathcal{B}_0(p)_{\mathbb{Z}[1/p]}$ est isogène à la puissance r-ème de la variété abélienne universelle sur $\mathcal{A}_0(p)_{\mathbb{Z}[1/p]}$ et où

$$\mathcal{M}_0(p)^{tor}_{\mathbb{Z}[1/p]}$$

est une fibration en plongements toriques de dimension $r(r+1)/2$ sur $\mathcal{B}_0(p)_{\mathbb{Z}[1/p]}$, ces plongements toriques étant construits grâce au choix combinatoire.

Il se trouve que le diagramme **2.1**.A admet un modèle entier naturel

$$(\mathbf{2.1}.\mathrm{B}) \qquad \mathcal{M}_0(p)^{tor} \to \mathcal{B}_0(p) \to \mathcal{A}_0(p)$$

sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ dans lequel $\mathcal{A}_0(p)$ est défini à la manière de $X_0(p)$ en paramétrant des chaînes de sous-groupes finis et plats. Il est donc naturel de chercher un modèle entier $X_0(p)^{tor}$ de la compactification $X_0(p)^{tor}$ de Faltings et Chai dont les voisinages étales des strates de bord soient donnés par la formule **2.1**.B. En un sens, on procède de façon opposée : au lieu de construire une compactification par un procédé abstrait – comme chercher à représenter un foncteur privilégié – puis de contrôler le voisinage de son bord, on fabrique cette compactification comme recollement d'ouverts étales du bord des objets apparaissant dans **2.1**.B. Une difficulté est alors de construire une relation d'équivalence étale sur l'union disjointe de ces objets à recoller, une autre étant de passer de la complétion formelle de $\mathcal{M}_0(p)^{tor}$ le long d'une strate de bord à un de ses voisinages étales. Sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$, Faltings et Chai ont résolu ces difficultés grâce à un astucieux procédé d'approximation reposant sur la lissité de $X_0(p)_{\mathbb{Z}[1/p]}$ et utilisant l'isomorphisme de Kodaira-Spencer, donc les formes différentielles de $X_0(p)_{\mathbb{Z}[1/p]}$. Bien que ce procédé ne soit pas transposable à $X_0(p)$ en raison de sa mauvaise réduction, j'ai montré qu'on pouvait en fait amender la méthode de Faltings et Chai appliquée non à $X_0(p)$ mais au champ de Deligne-Mumford X des variétés abéliennes principalement polarisées de genre g, qui a l'avantage d'être lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Voyons plus en détail la manière dont on peut construire $X_0(p)^{tor}$. La compactification X^{tor} de Faltings et Chai est également stratifiée et la complétion formelle le long d'une strate de bord est isomorphe à la complétion formelle de $\mathcal{M}^{tor}$ le long d'une strate de bord, où

$$\mathcal{M}^{tor} \to \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$

est encore un fibré en plongements toriques au dessus d'une variété abélienne au dessus d'un champ de Siegel sans niveau de genre inférieur à g. Le complémentaire du bord $\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}^{tor}$ est naturellement un champ de modules de 1-motifs principalement polarisés et on peut appliquer la construction de Mumford sur le complété formel

$$\widehat{\mathcal{M}}^{tor} .$$

Cette construction fournit un schéma semi-abélien universel A sur $\widehat{\mathcal{M}}^{tor}$ qui est abélien principalement polarisé sur la trace $\widehat{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$. Elle généralise la courbe de Tate qui associe au 1-motif $[\mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{G}_m]$ la courbe elliptique à réduction semi-stable d'équation $y^2 = x^3 + g_2(q)x + g_3(q)$ et, $g_2(q)$ et $g_3(q)$ étant des séries formelles, on voit bien qu'elle ne peut exister que sur des bases complètes pour la topologie q-adique. Par approximation d'Artin, on peut bien sûr s'arranger pour approcher A par un schéma semi-abélien A^h sur un voisinage étale $\mathcal{M}^{tor,h}$ du bord de $\mathcal{M}^{tor}$. Dans le cas elliptique, cela revient moralement à tronquer $g_2(q)$ et $g_3(q)$ à un ordre assez grand. Mais, si l'approximation est quelconque, on ne peut plus s'attendre à ce que A^h ait une quelconque propriété modulaire sur $\mathcal{M}^{tor,h}$. Par exemple, rien n'exclut que cette approximation soit constante sur un sous-schéma de la trace $\mathcal{M}^h$ de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}^{h,tor}$. L'application canonique de $\mathcal{M}^h$ dans X fournie par A^h est alors non étale, puisque qu'elle contracte ce sous-schéma sur un point de X, et il n'est pas possible de recoller $\mathcal{M}^{h,tor}$ à X le long de $\mathcal{M}^h$ dans le cadre de la géométrie algébrique. L'astuce-clé de Faltings et Chai à laquelle il a été fait allusion plus haut revient à affirmer que si l'approximation préserve l'isomorphisme de Kodaira-Spencer

$$\mathrm{Sym}^2\Omega_A \;=\; \Omega^1_{\widehat{\mathcal{M}}^{tor}}(\log D)$$

où Ω_A désigne les 1-formes différentielles invariantes et D est le diviseur de bord de $\mathcal{M}^{tor}$, alors la famille $A^h \to \mathcal{M}^{h,tor}$ reste verselle. Il est alors possible de montrer que $\mathcal{M}^h \to X$ est étale puis de définir X^{tor} comme recollement de X et de tous les $\mathcal{M}^{h,tor}$.

Remarque 2.1.1. — *Relier la versalité à l'isomorphisme de Kodaira-Spencer n'a rien de surprenant en théorie des déformations. Néanmoins, l'approche de Faltings et Chai est analogue à ce phénomène sans pour autant s'y ramener : les schémas semi-abéliens ont une théorie des déformations triviale si une de leurs fibres est torique, par rigidité des tores.*

La remarque importante pour compactifier $X_0(p)$ est que la construction de Mumford fournit un isomorphisme canonique $A[p] = M[p]$ sur $\widehat{\mathcal{M}}$, où $M[p]$ est la p-torsion du 1-motif universel. Autrement dit, bien que A ne soit pas algébrique et ne descende pas à $\mathcal{M}$, c'est le cas de $M[p]$ – pour tout p. Il est alors facile de montrer qu'il existe une approximation A^h à p-torsion fixée – pour p déterminé, ou variant dans une liste finie – c'est à dire vérifiant $A^h[p] = M[p]$. Puisque $\mathcal{M}_0(p) \to \mathcal{M}$ est l'espace de modules des drapeaux de sous-groupes finis et plats dans $M[p]$, on obtient un drapeau universel dans la p-torsion de $A^h \to \mathcal{M}_0(p)^h$ où $\mathcal{M}_0(p)^h = \mathcal{M}_0(p) \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}^h$. Le morphisme $\mathcal{M}_0^h \to X_0(p)$ est donc étale et on peut définir $X_0(p)^{tor}$ en recollant $X_0(p)$ à tous les $\mathcal{M}_0(p)^{h,tor} = \mathcal{M}_0(p)^{tor} \times_{\mathcal{M}^{tor}} \mathcal{M}^{h,tor}$. On obtient le théorème suivant [**St1**, th.3.2.7.1].

Théorème 2.1.2. — *À tout choix combinatoire convenable est associé une compactification toroïdale $X_0(p)^{tor}$. Elle est munie d'un schéma semi-abélien A. Elle est munie d'une stratification de bord paramétrée par le choix combinatoire. Le voisinage étale de chaque strate de bord est donnée par un ouvert étale du diagramme **2.1**.B.*

Remarque 2.1.3. — *La démonstration de ce théorème utilise toute la force de la théorie du modèle local* [**dJ**]. *On doit notamment montrer que $X_0(p)$ est normal, ce qui résulte aisément de sa platitude et du caractère réduit de sa fibre spécial* [**Go**].

Remarque 2.1.4. — *Madapusi a récemment donné une nouvelle méthode de démonstration de ce théorème qui utilise seulement le caractère réduit de la fibre spéciale* [**Ma**]. *La méthode de Madapusi revient à plonger X dans un produit de variétés de Siegel paramétrant des variétés abéliennes de genre g non principalement polarisées, le morphisme étant $(A, H_\bullet \subset A[p]) \mapsto (A, A/H_1, \cdots, A/H_{g-1})$. Par l'astuce de Zarhin, on peut de plus plonger tout cela dans un produit encore plus gros de variétés de Siegel principalement polarisées, qui admettent une compactification par Faltings et Chai. On peut alors définir un candidat pour $X_0(p)^{tor}$ comme normalisé de l'adhérence schématique sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ *de l'image du plongement. Madapusi montre qu'on peut contrôler cette normalisée sous l'hypothèse de fibre spéciale réduite.*

2.2. Compactification minimale en niveau iwahorique. — Les compactifications toroïdales précédentes ne sont pas canoniques puisqu'elles dépendent d'un choix combinatoire, mais elles ont la vertu de n'avoir pas plus de singularités que $X_0(p)$. En effet, le diagramme **2.1**.B montre que les singularités au bord de $X_0(p)^{tor}$ apparaissent dans la variété de Siegel de genre plus petit et de niveau iwahorique $\mathcal{A}_0(p)$, pourvu que le choix combinatoire donne naissance à un plongement torique lisse. On peut inverser l'ordre des priorités et chercher une compactification qui soit peut-être plus singulière mais canonique. C'est l'objet de la compactification minimale, ou de Satake ou de Baily-Borel.

La compactification minimale sera projective par construction, et elle sera donc un schéma et pas seulement un champ de Deligne-Mumford. Dans le cadre du paragraphe **2.1**, on ne peut pas espérer compactifier $X_0(p)$ mais seulement son espace de modules grossier. Cela n'étant pas si intéressant, nous passerons à un niveau net et noterons $X_0(p,n)$ le schéma sur $X_0(p)$ qui paramètre les similitudes symplectiques $A[p] = (\mathbb{Z}/n)^{2g}$ où $n \geq 3$ n'est pas divisible par p. Les résultats du paragraphe **2.1** restent valables. On remplace de même X par $X(n)$ et ainsi de suite.

La construction de la compactification minimale de $X(n)$, due à Faltings et Chai, repose sur des résultats de Moret-Bailly et notamment le fait que pour tout schéma normal excellent S et tout schéma semi-abélien A sur S le faisceau inversible des formes volumes invariantes ω_A est semi-ample, c'est-à-dire qu'une de ses puissances est engendrée par ses sections globales. On peut appliquer cela au schéma $X(n)^{tor}$ et au schéma semi-abélien universel. Soit $m \geq 1$ tel que ω_A^m soit engendré par ses sections globales. On construit alors la contraction de Stein de ω_A^m sur $X(n)^{tor}$, c'est-à-dire le meilleur schéma $X(n)^*$ tel qu'il existe un morphisme $\pi : X(n)^{tor} \to X(n)^*$ vérifiant $\pi_*(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ et tel que ω_A^m descende en un fibré inversible très ample. Utilisant un autre théorème de Moret-Bailly, on montre que π est un isomorphisme sur $X(n)$ donc que ω_A est « big » dans le sens de la géométrie birationnelle.

Le cas de $X_0(p,n)$ réserve une surprise. En effet sur $X_0(p,n)^{tor}$ on dispose non pas d'un seul schéma semi-abélien mais d'une chaîne d'isogénies

$$A = A_0 \to A_1 = A/H_1 \to \cdots \to A_{2g} = A/A[p] .$$

Si on mime la construction précédente en ne considérant que ω_A, on obtient alors une compactification minimale dans laquelle $X_0(p,n)$ ne se plonge pas ! Une meilleure solution consiste à appeler $X_0(p,n)^*$ la contraction de Stein de

$$\omega_{A_0} \otimes \omega_{A_1} \cdots \otimes \omega_{A_g}$$

car il est alors facile de prouver que $X_0(p,n)$ se plonge dans $X_0(p,n)^*$. Sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$ tous les ω_{A_i} sont isomorphes et il revient au même de considérer leur produit tensoriel ou seulement ω_{A_0}. Cela explique que le rôle de ce produit tensoriel n'ai jamais été observé.

Remarque 2.2.1. — *On utilise à plusieurs reprises la normalité de $X_0(p)$, qui est due essentiellement à Görtz (voir la remarque* ***2.1.3****).*

Il est également possible d'analyse le morphisme $\pi : X_0(p,n)^{tor} \to X_0(p,n)^*$ sur chaque strate de bord de la compactification toroïdale. On voit notamment que $X_0(p^n)^*$ ne dépend pas du choix combinatoire et que π écrase le fibré en plongement torique intervenant au bord de $X_0(p,n)^{tor}$. On obtient le théorème suivant [**St2**, th.3.9].

Théorème 2.2.2. — *Il existe un schéma projectif canonique $X_0(p,n)^*$ muni pour toute compactification toroïdale d'un morphisme $\pi : X_0(p,n)^{tor} \to X_0(p,n)^*$ tel que $\pi_*(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ et que π soit un isomorphisme sur $X_0(p,n)$. Chaque faisceau ω_{A_i} descend sur $X_0(p,n)^*$ et $\omega_{A_0} \otimes \cdots \otimes \omega_{A_g}$ y est ample.*

Le schéma $X_0(p,n)^*$ est stratifié par les variétés de Siegel de genre inférieur et de niveau iwahorique $\mathcal{A}_0(p,n)$. Le morphisme π respecte les stratifications de la source et du but et, en termes de la description locale de $X_0(p,n)^{tor}$ fournie par le diagramme ***2.1****.B, revient à contracter le bord de $\mathcal{M}_0(p,n)^{tor}$ sur $\mathcal{A}_0(p,n)$.*

Remarque 2.2.3. — *Un des conséquences du caractère canonique de $X_0(p,n)^*$ est que la tour $\varprojlim_n X_0(p,n)^*$ est munie d'une action par correspondance de l'algèbre de Hecke hors p. Ses diverses théories cohomologiques donnent donc un réceptacle dans lequel réaliser une partie de la correspondance de Langlands. Par opposition, la tour $\varprojlim_n X_0(p,n)^{tor}$ n'est absolument pas munie d'une telle action et il faut la remplacer par une double tour portant également sur tous les choix combinatoires possibles.*

Remarque 2.2.4. — *Hormis lorsque $g = 1$, le schéma $X_0(p,n)$ est hautement singulier même sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$. *Voir la remarque* ***3.1.12*** *pour une explication cohomologique de la complexité de ses singularités.*

Remarque 2.2.5. — *L'apparition de $\omega_{A_0} \otimes \cdots \otimes \omega_{A_g}$ suggère une théorie des formes de Siegel modulo p plus riche que la théorie usuelle qui correspond – en poids parallèle – aux section du seul ω_{A_0}. Je n'ai pour l'instant jamais trouvé d'interprétation arithmétique à ce phénomène. On peut toutefois expliquer de la manière suivante qu'il est absurde d'espérer que ω_{A_0} soit ample sur $X_0(p,n)^*$ et donc sur $X_0(p,n)$.*

Notons en effet $\phi : \tilde{X}(n) \to X(n)$ la fibration en grassmanniennes paramétrant les drapeaux complets dans le fibré vectoriel Ω_{A_0} de rang g. D'après [**EvG**, par.14]*, la composante irréductible de $X_0(p,n) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ sur laquelle le sous-groupe H_g est génériquement multiplicatif se plonge naturellement comme sous-schéma fermé dans $\tilde{X}(n) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Le faisceau ω_{A_0} est ample sur $X(n)$ mais plus sur $\tilde{X}(n)$ car ϕ n'est pas fini. Au contraire, il est plutôt raisonnable d'espérer que $\mathcal{O}_\phi(1) \otimes \phi^*(\omega_{A_0})$ soit ample sur $\tilde{X}(n)$, où $\mathcal{O}_\phi(1)$ est le faisceau standard sur $\tilde{X}(n)$ ample sur les fibres de ϕ. Écrivant la définition du plongement de la composante irréductible* *génériquement ordinaire-multiplicative de* $X_0(p,n)\times\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ *dans* $\tilde{X}(n)\times\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ *on en déduirait effectivement que* $\omega_{A_0}\otimes\cdots\otimes\omega_{A_g}$ *est ample sur cette composante de* $X_0(p,n)\times\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$.

Encore plus simple : le morphisme de $X_0(p,n)$ *dans* $X(n)$ *n'est pas fini si* $g\geq 2$ *car des* $\mathbb{P}^1$ *apparaissent déjà dans ses fibres sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ *lorsque* $g=2$. *Donc* ω_{A_0} *ne peut pas rester ample sur* $X_0(p,n)$.

Remarque 2.2.6. — *Les résultats des paragraphes* ***2.1*** *et* ***2.2*** *restent valables lorsqu'on remplace* $X(n)\to\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ *par une variété de Shimura PEL lisse de type (A) ou (C) et* $X_0(p,n)\to X(n)$ *par la variété de niveau Iwahori correspondant. Il faut alors systématiquement remplacer les références à Faltings-Chai par celles au travail de Lan* [**L1**].

2.3. Compactifications en niveau pro-p-iwahorique. — Notons $K_1=H_1$, $K_2=H_2/H_1...$, $K_{2g}=A[p]/H_{2g-1}$ qui sont des groupes de Oort-Tate sur $X_0(p)$. Après changement de base à $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ – ou à l'anneau Λ_p de Oort-Tate – on peut leur appliquer la théorie de Oort-Tate. On obtient que pour tout $1\leq i\leq 2g$, le schéma en groupe K_i est classifié par un fibré inversible $\mathcal{L}_i$ et des sections $a_i\in\mathrm{H}^0(X_0(p),\mathcal{L}_i^{p-1})$ et $b_i\in\mathrm{H}^0(X_0(p),\mathcal{L}_i^{1-p})$ tel que $a_i\cdot b_i\in\mathrm{H}^0(X_0(p),\mathcal{O})$ est égal à un élément $\omega_p\in p\cdot\mathbb{Z}_p^*$ défini par Oort et Tate. Plus précisément, K_i est un sous-schéma fermé de l'espace total de $\mathcal{L}_i$ défini par

$$K_i\;=\;\underline{\mathrm{Spec}}_{X_0(p)}\left(\underline{\mathrm{Sym}}_{X_0(p)}(\mathcal{L}_i^{-1})\;/\;(a_i-1)\mathcal{L}_i^{-p}\right)\;.$$

Ainsi localement sur des ouverts de $X_0(p)$ où $\mathcal{L}_i$ est trivial, K_i est défini dans $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[x_i])\times X_0(p)$ par l'équation $x_i^p=a_i\cdot x_i$. La section neutre de K_i est définie par l'équation $x_i=0$ et la loi de groupe fait intervenir b_i *via* une formule compliquée.

La chaîne de schémas abéliens $A\to A/H_1\to\cdots\to A/A[p]$ étant autoduale, on obtient des propriétés supplémentaires sur les données $(\mathcal{L}_i,a_i,b_i)$. Plus précisément, on a $\mathcal{L}_i^{-1}=\mathcal{L}_{2g+1-i}$ et b_i et a_{2b+1-i} se correspondent *via* cet isomorphisme.

Rappelons qu'on appelle générateur d'un groupe de Oort-Tate de paramètres $(\mathcal{L},a,b)$ toute section z de $\mathcal{L}$ telle que $z^{p-1}=a$. Lorsque le groupe est étale, c'est-à-dire lorsque a est inversible, cette notion n'est autre que celle d'un point d'ordre p mais, contrairement à plusieurs définitions naïves, elle continue à garder un sens raisonnable pour a quelconque. Notons donc $X_1(p)_{\Lambda_p}\to X_0(p)\times\mathrm{Spec}(\Lambda_p)$ le champ des générateurs de Oort-Tate $z_i\in\mathrm{H}^0(\mathcal{L}_i)$ pour tout $1\leq i\leq 2g$ tels que $z_i^{p-1}=a_i$ et $z_i\cdot z_{2g+1-i}$ soit indépendant de i. Ce champ se recolle avec l'espace évident $X_1(p)_{\mathbb{Z}[1/p]}\to X_0(p)\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$ paramétrant les points d'ordre p dans K_i, et l'on obtient donc un champ $X_1(p)\to X_0(p)$. Ce morphisme est représentable, fini, plat de degré $(p-1)^{g+1}$. Le groupe $(\mathbb{F}_p^*)^{g+1}$ agit transitivement dans les fibres et le morphisme est un torseur étale sous ce groupe sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$.

Remarque 2.3.1. — *Vu les équations définissant un générateur de Oort-Tate, c'est plutôt* μ_{p-1}^{g+1} *qui agit sur* $X_1(p)_{\Lambda_p}\to X_0(p)\times\mathrm{Spec}(\Lambda_p)$. *Mais on a par définition de* Λ_p *un isomorphisme canonique* $\mu_{p-1}=\mathbb{F}_p^*$ *sur cet anneau.*

Le champ $X_1(p)$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$ et la méthode de Faltings et Chai permet d'en construire des compactifications toroïdales. Voyons à présent comment étendre ces compactifications sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Nous avons vu que le schéma abélien A sur $X_0(p)$ s'étendait en un schéma semi-abélien encore noté A sur $X_0(p)^{tor}$. Il est donc naturel d'appeler encore H_i l'adhérence schématique du sous-groupe universel dans $A[p]$ sur $X_0(p)^{tor}$. Malheureusement, $A[p]$ étant seulement quasi-fini et plat sur $X_0(p)^{tor}$, on obtient de cette manière un groupe $H_i \to X_0(p)^{tor}$ qui n'est que quasi-fini et plat.

Remarque 2.3.2. — *Il résulte des propriétés de la construction de Mumford ainsi que d'un argument de monodromie qu'aucun sous-groupe fini et plat isotrope de $A[p]$ qui soit de rang $> p$ ne s'étend de manière finie et plate sur $X_0(p)^{tor}$. C'est en fait déjà le cas sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. *Cela montre notamment qu'on ne peut pas espérer généraliser les « polygones de Néron à p côtés » de Deligne et Rapoport en genre > 1.*

Même si les groupes H_i ne s'étendent pas de manière finie plate sur $X_0(p)^{tor}$, la remarque précédente montre qu'il n'est pas absurde d'espérer que les groupes K_i de rang p s'étendent en des groupes de Oort-Tate sur $X_0(p)^{tor}$. C'est en fait le cas, et cela résulte facilement de la description précise des strates de bord de $X_0(p)^{tor}$ donnée par le diagramme **2.1**.B. Plus précisément à tout entier $1 \leq i \leq g$ et toute strate de bord est associé un unique choix parmi les mots « abélien », « torique » et « étale ». Nous voulons dire par là que le schéma d'Oort-Tate K_i sur $\widehat{\mathcal{M}}_0(p)$ provient soit d'un schéma de Oort-Tate sur $\mathcal{A}_0(p)$, soit du schéma μ_p soit du schéma $\mathbb{Z}/p$. Dans les deux derniers cas, K_i se prolonge de manière évidente sur

$$\widehat{\mathcal{M}}_0(p)^{tor}$$

et dans le premier cas c'est également vrai puisque $\widehat{\mathcal{M}}_0(p)^{tor}$ continue à se fibrer sur $\mathcal{A}_0(p)$. On définit alors simplement $X_1(p)^{tor} \to X_0(p)^{tor}$ comme l'espace de modules des générateurs de Oort-Tate de K_i pour tout $1 \leq i \leq 2g$ vérifiant la même condition symplectique que précédemment. On obtient le théorème suivant [**St6**, par.2.4.5].

Théorème 2.3.3. — *Il existe une compactification toroïdale $X_1(p)^{tor}$ de $X_1(p)$ sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. *Elle est munie d'un morphisme représentable, fini et plat vers $X_0(p)^{tor}$ qui est étale sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$. *Le groupe $(\mathbb{F}_p^*)^{g+1}$ agit transitivement dans les fibres et le morphisme est un torseur sous ce groupe sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$. *Le champ $X_1(p)^{tor}$ est muni d'une stratification compatible à celle de $X_0(p)^{tor}$ et un voisinage étale de chaque strate de bord est isomorphe à un voisinage étale de $\mathcal{M}_1(p)^{tor}$ où ce dernier champ se dévisse en*

$$\mathcal{M}_1(p)^{tor} \to \mathcal{B}_1(p) \to \mathcal{A}_1(p)$$

et $\mathcal{A}_1(p)$ est à $\mathcal{A}_0(p)$ ce que $X_1(p)$ est à $X_0(p)$.

Remarque 2.3.4. — *Le fait que $X_1(p)^{tor}$ soit étale galoisien sur $X_0(p)^{tor}$ de groupe $(\mathbb{F}_p^*)^{g+1}$ entraîne que pour tout nombre puissance ℓ^r d'un nombre premier ℓ tel que ℓ^r divise $p-1$, il existe un quotient de $X_1(p)$ noté $X_\Delta(p)$ qui soit étale galoisien sur $X_0(p)$ de groupe $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$. Cela permet, avec d'autres ingrédients, de montrer un théorème « R=T » pour le H^0 cohérent des variétés de Siegel sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_\ell)$, *le nombre p étant considéré comme une place de Taylor-Wiles, et répond à une question d'Harris (à savoir généraliser* [**H2**] *à des cas non compacts).*

On peut alors jouer au même jeu que dans le paragraphe **2.2** et construire $X_1(p)^*$ comme factorisation de Stein d'un fibré semi-ample sur $X_1(p)^{tor}$. On obtient le théorème suivant [**St6**, th.2.4.9]. Pour éviter l'apparition d'espaces de modules grossiers comme dans le paragraphe **2.2** on rajoute une structure de niveau auxiliaire tuant les automorphismes et on remplace $X_1(p)$ par $X_1(p, n)$.

Théorème 2.3.5. — *Il existe une compactification canonique $X_1(p,n)^*$ de $X_1(p,n)$ telle que pour toute compactification toroïdale $X_1(p,n)^{tor}$, on ait un morphisme $\pi : X_1(p,n)^{tor} \to X_1(p,n)^*$ tel que $\pi_*(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Il existe un morphisme canonique de $X_1(p,n)^*$ dans $X_0(p,n)^*$ qui est fini et plat, et étale sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$. *Il est muni d'une action de $(\mathbb{F}_p^*)^{g+1}$ transitive dans les fibres et est un torseur sous ce groupe sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$.

Remarque 2.3.6. — *Il paraît logique de penser que le groupe d'Oort-Tate K_i définit précédemment sur $X_0(p)^{tor}$ descend à $X_0(p)^*$ pour tout i. On pourrait alors tout simplement définir $X_1(p)^*$ comme l'espace de modules des générateurs symplectiques des groupes de Oort-Tate K_i sur $X_0(p)^*$.*

Remarque 2.3.7. — *Comme nous l'avons souligné dans le paragraphe **2.2**, la normalité des espaces en jeu joue un grand rôle dans la construction de la compactification minimale. Il se trouve que $X_1(p)$ reste normal d'après le critère de Serre. En effet, son lieu ordinaire est régulier d'après la théorie de Serre-Tate et de complémentaire de codimension ≥ 2. De plus, $X_1(p)$ est par définition une intersection complète relative sur $X_0(p)$ qui est Cohen-Macaulay d'après He* [**He**]. *Donc $X_1(p)$ est également Cohen-Macaulay ce qui permet de prouver sa normalité.*

Remarque 2.3.8. — *Les résultats exposés dans ce paragraphe valent dans le cadre de la remarque **2.2.6** lorsqu'on suppose que les analogues des groupes K_i sont des groupes de Raynaud* [**Ray**]. *Il faut alors remplacer la notion de générateurs de Oort-Tate par celle de générateurs de Raynaud. Dans le cas (C) cette hypothèse impose de travailler avec des variétés associées à un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ dont la restriction à $\mathbb{Q}_p$ est produit de restrictions des scalaires de groupes symplectiques sur des extensions non ramifiées de $\mathbb{Q}_p$. Dans le cas (A), cela impose de travailler avec des variétés associées à un groupe dont la restriction à $\mathbb{Q}_p$ est produit de groupes linéaires sur des extensions non ramifiées de $\mathbb{Q}_p$.*

3. Cycles proches

3.1. Au bord. — Soit ℓ un nombre premier différent de p. Le champ $X_0(p)$ ayant mauvaise réduction, la cohomologie étale de sa fibre générique géométrique

$$\mathrm{H}^i\left(X_0(p) \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}_p),\ \mathbb{Q}_\ell\right)$$

porte une intéressante action du sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ à laquelle on aimerait accéder *via* l'étude du complexe de faisceau $\mathrm{R}\Psi_{X_0(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$ qui ne dépend que des singularités locales de $X_0(p)$. Mais puisque $X_0(p)$ n'est pas propre, aucune raison générale ne garantit la coïncidence de la cohomologie de sa fibre générique et de celle de sa fibre spéciale à valeurs dans $\mathrm{R}\Psi_{X_0(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$. Montrer cette coïncidence est notre premier but.

3.1.1. Cycles proches et images directes. — Notons $J : X_0(p) \hookrightarrow X_0(p)^{tor}$. Pour montrer que

$$\mathrm{H}^i\left(X_0(p) \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}_p),\ \mathbb{Q}_\ell\right) = \mathrm{H}^i\left(X_0(p) \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p),\ \mathrm{R}\Psi_{X_0(p)}(\mathbb{Q}_\ell)\right)$$

il suffit d'après le théorème de changement de base propre appliqué à $X_0(p)^{tor}$ de prouver que le morphisme d'adjonction induit un isomorphisme $\mathrm{R}J_* \circ \mathrm{R}\Psi_{X_0(p)}(\mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{R}\Psi_{X_0(p)^{tor}} \circ \mathrm{R}J_*(\mathbb{Q}_\ell)$ Cela se teste localement pour la topologie étale et on bénéficie donc de la description du bord de $X_0(p)^{tor}$ donnée par le diagramme **2.1**.B. Mais on voit sur ce diagramme que $\mathrm{R}J_*$ et $\mathrm{R}\Psi$ commutent car ils n'ont « aucune interaction ». Nous voulons dire par là que localement pour la topologie étale, l'inclusion de $\mathcal{M}_0(p)$ dans $\mathcal{M}_0(p)^{tor}$ est produit de $\mathcal{B}_0(p)$ par l'inclusion d'un tore T dans un plongement torique lisse T^{tor} dont le bord est un diviseur à croisements normaux. Tout se passe donc comme si $(J : \mathcal{M}_0(p) \hookrightarrow \mathcal{M}_0(p)^{tor})$ était produit de $\mathcal{B}_0(p)$ par $(J' : T \hookrightarrow T^{tor})$. Mais par changement de base lisse, $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$ est concentré sur le premier facteur alors que $\mathrm{R}J_*$ est égal à l'identité sur le premier facteur et à $\mathrm{R}J'_*$ sur le second. La commutation des cycles proches et du prolongement par image directe est alors évidente. On obtient le théorème suivant [**St5**, prop.4.1].

Théorème 3.1.2. — *Il existe pour tout entier $i \geq 0$ un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^i\left(X_0(p) \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}_p),\ \mathbb{Q}_\ell\right) = \mathrm{H}^i\left(X_0(p) \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p),\ \mathrm{R}\Psi_{X_0(p)}(\mathbb{Q}_\ell)\right)$$

qui est équivariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

Notons $j : X_0(p,n) \hookrightarrow X_0(p,n)^*$. On déduit de l'énoncé de commutation précédent et du théorème de changement de base propre pour le morphisme de $X_0(p,n)^{tor}$ dans $X_0(p,n)^*$ que

$$\mathrm{R}j_* \circ \mathrm{R}\Psi_{X_0(p,n)}(\mathbb{Q}_\ell) \;=\; \mathrm{R}\Psi_{X_0(p,n)^*} \circ \mathrm{R}j_*(\mathbb{Q}_\ell)\,.$$

Couplé à l'exactitude de $\mathrm{R}\Psi$ pour la t-structure perverse, on en déduit que

$$j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{X_0(p,n)}(\mathbb{Q}_\ell) \;=\; \mathrm{R}\Psi_{X_0(p,n)^*} \circ j_{!*}(\mathbb{Q}_\ell)$$

où $j_{!*}$ désigne bien sûr le prolongement intermédiaire d'un faisceau pervers éventuellement décalé. Cela implique le théorème suivant.

Théorème 3.1.3. — *Il existe pour tout entier $i \geq 0$ un isomorphisme canonique entre groupes de cohomologie d'intersection*

$$\mathrm{IH}^i\left(X_0(p,n)^* \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}_p),\ \mathbb{Q}_\ell\right) = \mathrm{H}^i\left(X_0(p,n)^* \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p),\ j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{X_0(p,n)}(\mathbb{Q}_\ell)\right)$$

qui est équivariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

Remarque 3.1.4. — *Le slogan des théorèmes **3.1.2** et **3.1.3** est que les cycles proches calculent diverses théories cohomologiques des variétés de Shimura dans notre contexte. Notons également qu'on peut aussi bien se placer avec des coefficients de torsion première à p. On peut également remplacer le faisceau constant par des systèmes locaux automorphes.*

3.1.5. *Stratifications au bord.* — D'après [**HN**], la fibre spéciale de $X_0(p,n)$ est munie d'une stratification de Kottwitz-Rapoport à strates lisses

$$X_0(p,n) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \;=\; \bigcup_{w \in W^{adm}} X_0(p,n)^w$$

telle que $\mathrm{R}\Psi_{X_0(p,n)}(\mathbb{Q}_\ell)$ soit constant le long de chaque strate $X_0(p,n)^w$. Ici W^{adm} est un sous-ensemble fini du groupe de Weyl affine du groupe général symplectique GSp_{2g} sur le corps local $\mathbb{F}_p((t))$ et ce sous-ensemble est stable par prise d'élément inférieur pour l'ordre de Bruhat $\leq$. L'adhérence de la strate associée à w est d'ailleurs l'union des strates associées aux $w' \leq w$.

Notre but est double : étendre cette stratification à $X_0(p,n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et à $X_0(p,n)^{min}$ puis donner une formule pour le prolongement intermédiaire $j_{!*}$ du complexe d'intersection $\mathcal{IC}^w$ de l'adhérence schématique $X_0(p,n)^{\leq w}$ de $X_0(p,n)^w$ dans $X_0(p,n)$.

Remarque 3.1.6. — *Il résulte de la construction de la stratification de Kottwitz-Rapoport que $X_0(p,n)^w \hookrightarrow X_0(p,n)^{\leq w}$ est isomorphe localement pour la topologie étale à une strate ouverte plongée dans une variété de Schubert affine pour le groupe* $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_p((t)))$. *Ainsi $X_0(p,n)^{\leq w}$ n'est pas lisse sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ *en général et son complexe d'intersection $\underline{\mathcal{IC}}_w$ donne naissance à des polynômes de Kazhdan-Lusztig pour le groupe général symplectique.*

Remarque 3.1.7. — *En fait pour tout nombre premier $q \nmid n\ell p$, le schéma $X_0(p,n) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ est également muni d'une stratification de Kottwitz-Rapoport. Cette dernière n'est plus reliée à la variété de drapeaux affine de* GSp_{2g} *mais à sa grassmannienne affine, et de plus à une représentation minuscule de ce groupe. Il n'y a donc qu'une seule strate de Kottwitz-Rapoport, qui est lisse et égale à $X_0(p,n) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ et, à décalage près, le complexe d'intersection est simplement égal au faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$. Une formule pour $j_{!*}(\mathbb{Q}_\ell)$ dans le groupe de Grothendieck a été donnée par Morel dans* [**M1**] *et c'est ce travail que nous voulons généraliser.*

C'est encore une fois le diagramme **2.1**.B qui élucide le comportement de la stratification de Kottwitz-Rapoport au bord de $X_0(p,n)^{tor}$. Soit en effet un voisinage étale d'une strate de bord de $X_0(p,n)^{tor}$ donnée par un ouvert étale U de $\mathcal{M}_0(p,n)^{tor} \to \mathcal{A}_0(p,n)$. Il est alors aisé de voir que la trace de $X_0(p,n)^{\leq w}$ sur U est soit vide, soit égale à l'image inverse dans U d'une unique strate de Kottwitz-Rapoport $\mathcal{A}_0(p,n)^{w'}$ de la variété de Shimura de niveau iwahorique $\mathcal{A}_0(p,n) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Savoir de plus dans quel cas de la dichotomie on se trouve ne dépend que la théorie des groupes, ainsi que la compréhension du morphisme partiel $w \mapsto w'$: il s'agit essentiellement de comparer les éléments admissibles pour GSp_{2g} et ceux d'un constituant irréductible du Lévi d'un des ses sous-groupes paraboliques maximaux. Puisque $\mathcal{M}_0(p,n)^{tor}$ continue de se fibrer sur $\mathcal{A}_0(p,n)$, on en déduit bien que la strate $X_0(p,n)^{w,tor}$ s'étend en un sous-schéma localement fermé lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$

$$X_0(p,n)^{w,tor} \hookrightarrow X_0(p,n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)\,.$$

On peut également définir le sous-schéma fermé $X_0(p,n)^{\leq w,tor}$ comme union de strates. Le morphisme $\pi : X_0(p,n)^{tor} \to X_0(p,n)^*$ et sa description au bord permet alors de définir des strates localement fermées et fermées $X_0(p,n)^{w,*}$ et $X_0(p,n)^{\leq w,*}$ de $X_0(p,n)^*$. L'intersection de $X_0(p,n)^{w,*}$ avec la strate de bord $\mathcal{A}_0(p,n)$ de $X_0(p,n)^*$ est donc soit vide, soit égal à une unique strate de Kottwitz-Rapoport $\mathcal{A}_0(p,n)^{w'}$ de $\mathcal{A}_0(p,n)$.

Le premier calcul cohomologique concerne le prolongement par image directe $\mathrm{R}j_*(\underline{\mathcal{IC}}^w)$ du complexe d'intersection de $X_0(p,n)^w$ dans la compactification minimale. Considérons une strate de bord $\mathcal{A}_0(p,n)$ de $X_0(p,n)^*$ et notons $i : \mathcal{A}_0(p,n) \hookrightarrow X_0(p,n)^*$ l'immersion localement fermée. Nous renvoyons à [**St5**, th.8.1] pour des notations et un énoncé plus précis.

Théorème 3.1.8. — *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

- ***i.*** *Si l'intersection de $X_0(p,n)^{w,*}$ et de $\mathcal{A}_0(p,n)$ est vide, alors $i^* \circ \mathrm{R}j_*(\underline{\mathcal{IC}}^w) = 0$.*
- ***ii.*** *Si l'intersection de $X_0(p,n)^{w,*}$ et de $\mathcal{A}_0(p,n)$ est égale à la strate de Kottwitz-Rapoport paramétrée par w' dans $\mathcal{A}_0(p,n)$, alors $i^* \circ \mathrm{R}j_*(\underline{\mathcal{IC}}^w)$ est donné par le prolongement intermédiaire le long de $\mathcal{A}_0(p,n)^{w'} \hookrightarrow \mathcal{A}_0(p,n)$ d'un complexe de systèmes locaux automorphes faisant intervenir la cohomologie des groupes discrets et des algèbres de Lie.*

Remarque 3.1.9. — *Pour tout nombre premier $q \nmid n\ell p$ – éventuellement nul – nous avons vu dans la remarque **3.1.7** que $X_0(p,n) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ est lisse et muni d'une unique strate de Kottwitz-Rapoport. On a donc $\underline{\mathcal{IC}}^w = \mathbb{Q}_\ell$ à décalage près. Une formule pour $i^* \circ \mathrm{R}j_*(\mathbb{Q}_\ell)$ a été donné par Pink dans* [**Pin**]. *Elle fait intervenir un complexe de systèmes locaux automorphes* *relié à la cohomologie des groupes discrets et des algèbres de Lie et c'est exactement ce complexe qui apparaît dans le second point du théorème.*

Pour un énoncé précis du théorème suivant, voir [**St5**, prop.9.1].

Théorème 3.1.10. — *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

i. *Si l'intersection de $X_0(p,n)^{w,*}$ et de $\mathcal{A}_0(p,n)$ est vide, alors $i^* \circ j_{!*}(\underline{\mathcal{IC}}^w) = 0$.*

ii. *Si l'intersection de $X_0(p,n)^{w,*}$ et de $\mathcal{A}_0(p,n)$ est égale à la strate de Kottwitz-Rapoport $\mathcal{A}_0(p,n)^{w'}$, alors $i^* \circ j_{!*}(\underline{\mathcal{IC}}^w)$ est donné dans le groupe de Grothendieck par une somme de prolongements intermédiaires le long de $\mathcal{A}_0(p,n)^{w'} \hookrightarrow \mathcal{A}_0(p,n)$ de complexes de systèmes locaux automorphes faisant intervenir la cohomologie des groupes discrets et des algèbres de Lie ainsi que des troncations de représentations algébriques par les poids de l'action d'un tore central.*

Remarque 3.1.11. — *Toujours au dessus de* $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ *pour $q \nmid n\ell p$ le calcul de $i^* \circ j_{!*}(\mathbb{Q}_\ell)$ a été effectué par Morel* [**M1**] *dans le groupe de Grothendieck de $\mathcal{A}_0(p,n) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$. Ce calcul fait intervenir une somme de complexes de systèmes locaux automorphes reliés à la cohomologie des groupes discrets et des algèbres de Lie, ainsi que des troncations par le poids de l'action de de tores centraux. C'est cette somme qui apparaît dans le second point du théorème précédent.*

La démonstration du théorème **3.1.10** résulte formellement du théorème **3.1.8**, de la théorie de Morel du prolongement intermédiaire de faisceaux pervers purs comme tronqués de leur prolongement par image directe et de la combinatoire déjà présente dans [**M1**]. Pour appliquer la théorie de Morel, nous utilisons bien sûr la pureté du complexe d'intersection $\underline{\mathcal{IC}}^w$ due à Gabber.

Remarque 3.1.12. — *Soit Y un schéma propre sur un corps k. Le complexe d'intersection $\underline{\mathcal{IC}}_Y$ a comme but moral de contrebalancer les singularités de Y : si Y est lisse il est égal au faisceau constant décalé et si Y n'est pas lisse, il est d'autant plus compliqué que le sont les singularités de Y, et en « sens inverse » de telle manière que la cohomologie d'intersection $\mathrm{IH}^i(Y \times \mathrm{Spec}(\bar{k})) = \mathrm{H}^i(Y \times \mathrm{Spec}(\bar{k})), \underline{\mathcal{IC}}_Y)$ soit pure et autoduale comme dans le cas lisse. La dimension et l'amplitude cohomologique des fibres de $\underline{\mathcal{IC}}_Y$ donne donc un moyen précis de quantifier l'importance des singularités de Y. On voit d'après les formules de* [**M1**] *que même sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ *ou* $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ *avec $q \nmid np$, les singularités de $X_0(p,n)^*$ sont très compliquées bien que $X_0(p,n)$ soit lisse. Ces singularités sont en un sens aussi compliquées que la partie non semi-simple de la formule des traces d'Arthur.*

Remarque 3.1.13. — *Le résultat de **3.1.8.(ii)** ne fait intervenir que les sous-groupes paraboliques maximaux de* GSp_{2g} *définis sur* $\mathbb{Q}$ *alors que celui de **3.1.10.(ii)** fait intervenir tous les sous-groupes paraboliques définis sur $\mathbb{Q}$, autrement dit utilise toute la structure simpliciale de l'immeuble de Tits de* GSp_{2g}. *Le résultat est donc plus compliqué, mais plus symétrique et plus aisément reliable à la formule des traces.*

3.1.14. *Cycles proches au bord.* — Pour étudier la cohomologie d'intersection de la fibre géométrique générique de $X_0(p,n)^*$, nous voulons donner une formule pour $j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{X_0(p,n)}(\mathbb{Q}_\ell)$ dans le groupe de Grothendieck des faisceaux ℓ-adiques sur $X_0(p,n)^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ munis d'une action compatible de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Il suffit pour cela de calculer $i^* \circ j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{X_0(p,n)}(\mathbb{Q}_\ell)$ dans le groupe de Grothendieck pour toute strate $i : \mathcal{A}_0(p,n) \hookrightarrow X_0(p,n)^*$. Le résultat est le suivant [**St6**, th.1.4.8].

Théorème 3.1.15. — *Dans le groupe de Grothendieck des faisceaux ℓ-adiques sur $\mathcal{A}_0(p,n)$ munis d'une action compatible de* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$*, le complexe $i^* \circ j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{X_0(p,n)}(\mathbb{Q}_\ell)$ est égal au foncteur des cycles proches $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0(p,n)}$ appliqué à une somme de complexes de systèmes locaux automorphes sur $\mathcal{A}_0(p,n)$ faisant intervenir la cohomologie des groupes discrets et des algèbres de Lie ainsi que des troncations de représentations algébriques par les poids de l'action d'un tore central.*

Cette somme est celle apparaissant dans [**M1**] et dans le théorème **3.1.10**.**(ii)**. Le théorème **3.1.15** résulte immédiatement des résultats de Morel sur tous les $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ pour $q \nmid n\ell p$, du théorème de Cebotarev pour les faisceaux pervers sur les schémas de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et des résultats de commutation du paragraphe **3.1.1**. On peut également le prouver en utilisant les résultats de [**M3**] (voir l'erratum de [**St5**]).

Le théorème **3.1.15** devrait permettre, en suivant directement [**M2**] et en tenant compte de la conjecture de Kottwitz (voir le paragraphe **3.2.1**), de relier la trace semi-simple du Frobenius en p tordu par des correspondances de Hecke hors p agissant sur $\mathrm{IH}^\bullet(X_0(p)^* \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}_p))$. Toutefois cela n'a guère d'intérêt : de la même manière que nous avons prouvé le théorème **3.1.15** grâce à Cebotarev et son analogue dû à Morel en toutes les places de bonne réduction, on peut également analyser $\mathrm{IH}^\bullet(X_0(p)^* \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}_p))$ comme module sous le produit de l'algèbre de Hecke et de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ en analysant $\mathrm{IH}^\bullet(X_0(p)^* \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}))$ par Cebotarev, puisque la structure de $\mathrm{IH}^\bullet(X_0(p)^* \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_q))$ comme Hecke $\times$ $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$-module a été élucidée par Morel pour tout $q \nmid n\ell p$.

3.1.16. *Niveau pro-p-iwahorique.* — Les théorèmes **3.1.2**, **3.1.3** et **3.1.15** se généralisent immédiatement pour le schéma $X_1(p,n)$. En effet, leur démonstration n'utilisaient que la structure produit des voisinages du bord de $X_0(p,n)^{tor}$ et d'après le théorème **2.3.3**, les voisinages étale du bord de $X_1(p,n)^{tor}$ ont une structure produit analogue. De plus, les théorèmes **3.1.8** et **3.1.10** sont également valables [**St6**, par.2.5] pour $X_1(p)$ et sa stratification tirée de la stratification de Kottwitz-Rapoport *via* le morphisme fini et plat $X_1(p,n) \to X_0(p,n)$.

3.2. À l'intérieur.

— Dans ce paragraphe, nous oublions les compactifications et nous concentrons sur $\mathrm{R}\Psi_{X_0(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $\mathrm{R}\Psi_{X_1(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$. Le but est d'élucider en termes de théorie des algèbres de Hecke les fonctions trace semi-simple de Frobenius

$$\tau_{X_0(p)} \;:\; X_0(p)(\mathbb{F}_{p^r}) \;\longrightarrow\; \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

et $\tau_{X_1(p)} : X_1(p)(\mathbb{F}_{p^r}) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ définies par Rapoport pour tout entier $r \geq 1$. Vu le théorème **3.1.15** et son analogue pour $X_1(p,n)$, ces résultats à l'intérieur permettront également d'élucider strate de bord par strate de bord la valeur de la trace semi-simple de Frobenius sur les prolongements intermédiaires de $\mathrm{R}\Psi_{X_0(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $\mathrm{R}\Psi_{X_1(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$ aux compactifications minimales. Les résultats de cette partie ont été obtenus en collaboration avec Haines.

3.2.1. *Le cas iwahorique.* — Le cas de $\tau_{X_0(p)}$ est dû à Kottwitz, Gaitsgory [**Ga**] et Haines et Ngô [**HN**] et nous allons rappeler leurs résultats dans ce paragraphe. La morale est qu'on peut voir $\tau_{X_0(p)}$ comme élément de l'algèbre de Hecke-Iwahori pour $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}((t)))$ et que cet élément est central d'image explicite sous l'isomorphisme de Bernstein identifiant le centre de l'algèbre Hecke-Iwahori avec l'algèbre de Hecke sphérique.

La première chose à expliquer est la manière dont $\tau_{X_0(p)}$ définit une fonction dans l'algèbre de Hecke-Iwahori. C'est un corollaire de la théorie du modèle local, due à De Jong [**dJ**] et

Rapoport-Zink [**RZ**] et qui affirme qu'il existe un diagramme

(**3.2**.A)
$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M}_0^{\mathrm{loc}}(p) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_0(p) & & M_0^{\mathrm{loc}}(p) \end{tikzcd}$$

à flèches lisses. Ainsi, les complexes $\mathrm{R}\Psi_{X_0(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $\mathrm{R}\Psi_{M_0^{\mathrm{loc}}(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$ ont même image inverse sur
$$\widetilde{M}_0^{\mathrm{loc}}(p)\ .$$
Comme on peut de plus montrer que $\widetilde{M}_0^{\mathrm{loc}}(p)(\mathbb{F}_{p^r}) \to X_0(p)(\mathbb{F}_{p^r})$ est surjective pour tout $r \geq 1$, l'étude de $\tau_{X_0(p)}$ se ramène donc à celle de
$$\tau_{M_0^{\mathrm{loc}}(p)}\ :\ M_0^{\mathrm{loc}}(p)(\mathbb{F}_{p^r})\ \longrightarrow\ \bar{\mathbb{Q}}_\ell\ .$$
Notons $I(\mathbb{F}_{p^r}) \subset \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}[[t]])$ l'ensemble des matrices qui sont triangulaires supérieures *modulo* t. Lorsque r varie, il définit naturellement un ind-schéma en groupes sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ que nous noterons toujours I. On peut alors montrer que I agit sur $M_0^{\mathrm{loc}}(p) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et que $M_0^{\mathrm{loc}}(p)\times\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ se plonge dans la variété de drapeaux affines de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_p((t)))$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ de manière équivariante sous I. De plus, le faisceau pervers décalé
$$\mathrm{R}\Psi_{M_0^{\mathrm{loc}}(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$$
est stable par I sur $M_0^{\mathrm{loc}}(p) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. On obtient donc un plongement
$$M_0^{\mathrm{loc}}(p)(\mathbb{F}_{p^r})\ \hookrightarrow\ \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}((t)))/I(\mathbb{F}_{p^r})$$
stable par l'action de $I(\mathbb{F}_{p^r})$ et la fonction $\tau_{M_0^{\mathrm{loc}}(p)}$ définit par prolongement par zéro une fonction que nous noterons encore $\tau_{M_0^{\mathrm{loc}}(p)}$ sur
$$I(\mathbb{F}_{p^r}) \setminus \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}((t)))\ /\ I(\mathbb{F}_{p^r})\ .$$
C'est l'élément que nous voulions dans l'algèbre de Hecke-Iwahori à valeurs ℓ-adiques. Les travaux de Gaitsgory et Haines et Ngô montrent qu'il est central dans cette algèbre.

Remarque 3.2.2. — *Les cycles proches de schémas analogues à $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$ permettent en fait de définir géométriquement tout le centre de l'algèbre de Hecke-Iwahori. Plus précisément, Gaitsgory géométrise l'inverse de l'isomorphisme de Bernstein identifiant ce centre à l'algèbre de Hecke sphérique. Il est bien connu par l'isomorphisme de Satake géométrique* [**MV**] *que cette algèbre sphérique admet comme géométrisation une catégorie de faisceaux pervers équivariants sur la grassmannienne affine.*

Il nous reste à dire quelques mots sur la définition de $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$. Rappelons qu'on a noté précédemment $A_0 = A \to A_1 = A/H_1 \to \cdots \to A_{2g} = A/A[p]$ la chaîne d'isogénie universelle sur $X_0(p)$. On dispose donc sur $X_0(p)$ de la chaîne de cohomologies de De Rham relatives munies de leurs filtrations de Hodge
$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^1_{dR}(A_0) & \mathcal{H}^1_{dR}(A_1) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \mathcal{H}^1_{dR}(A_{2g}) \arrow[l] \\ \Omega_{A_0} \arrow[u] & \Omega_{A_1} \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] & \Omega_{A_{2g}} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

et d'après De Jong [**dJ**] la ligne supérieure est isomorphe localement pour la topologie de Zariski à une chaîne standard $\mathbb{V}_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{X_0(p)} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbb{V}_{2g} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{X_0(p)}$. Le schéma

$$\widetilde{M}_0^{\mathrm{loc}}(p)$$

paramètre alors les isomorphismes entre la chaîne de cohomologies de De Rham et la chaîne standard, et les S points du schéma $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$ correspondent aux diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S & \mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \mathbb{V}_{2g} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S \arrow[l] \\
\Omega_0 \arrow[u] & \Omega_1 \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] & \Omega_{2g} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où $\Omega_i \subset \mathbb{V}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S$ est localement un facteur direct totalement isotrope de rang g.

Remarque 3.2.3. — *Le lien entre* $M_0^{\mathrm{loc}}(p) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ *et la variété de drapeaux affine pour* $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_p((t)))$ *n'est pas transparent sur cette définition. Il le devient quand on remplace la chaîne* $\mathbb{V}_\bullet$ *par* $\mathbb{V}_\bullet[[t]]$ *et qu'au lieu de paramétrer* $\Omega_\bullet \subset \mathbb{V}_\bullet$ *on paramètre des sous* $\mathcal{O}_S[[t]]$*-modules* $t \cdot \mathbb{V}_\bullet[[t]] \subset \mathcal{W}_\bullet \subset \mathbb{V}_\bullet[[t]]$ *tels que* $\mathcal{W}_\bullet / t \cdot \mathbb{V}_\bullet[[t]] = \Omega_\bullet$.

3.2.4. Le modèle local en niveau pro-p-iwahorique. — Notre but est de définir un diagramme analogue à **3.2**.A dans lequel $X_0(p)$ soit remplacé par $X_1(p)$. On se place sur la base Λ_p de Oort-Tate. Puisque $X_1(p) \to X_0(p)$ paramètre les générateurs de Oort-Tate des groupes $K_1 = H_1$, $K_2 = H_2/H_1$,... ,$K_{2g} = A[p]/H_{2g-1}$, cela revient à se demander quelle information parmi les données de Oort-Tate $(\mathcal{L}_i, a_i, b_i)$ tirées à

$$\widetilde{M}_0^{\mathrm{loc}}(p)$$

descend à $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$. On répond à cette question en remarquant que le complexe de co-Lie ℓ_i de K_i est le complexe parfait $[\mathcal{L}_i^{-p} \xrightarrow{a} \mathcal{L}_i^{-1}]$ placé en degrés -1 et 0 et que ce complexe est canoniquement quasi-isomorphe à $[\Omega_{A_i} \to \Omega_{A_{i-1}}]$ puisque K_i est égal au noyau de $A_{i-1} \to A_i$. Ainsi ℓ_i descend à $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$. La théorie du déterminant de Mumford-Knudsen [**KM**] montre alors que $\mathcal{L}_i^{p-1}$ et sa section a_i descendent. Par dualité, il en est de même de la section b_i de $\mathcal{L}_i^{1-p}$.

Remarque 3.2.5. — *Le faisceau* $\mathcal{L}_i$ *ne descend par contre pas à* $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$*, même sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$.

On définit alors $M_1^{\mathrm{loc}}(p)$ comme l'espace de modules des racines $(p-1)$-èmes de $(\mathcal{L}_i, a_i)$ sur $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$ vérifiant une condition d'isotropie. En posant

$$\widetilde{M}_1^{\mathrm{loc}}(p) \;=\; \widetilde{M}_0^{\mathrm{loc}}(p) \times_{X_0(p)} X_1(p)$$

on obtient bien un diagramme analogue à **3.2**.A pour $X_1(p)$. Remarquons que comme la définition de $M_1^{\mathrm{loc}}(p)$ fait intervenir des racines $(p-1)$-èmes de faisceaux inversibles, le morphisme $M_1^{\mathrm{loc}}(p) \to M_0^{\mathrm{loc}}(p)$ n'est pas représentable mais seulement représentable sur une gerbe liée par μ_{p-1}^{g+1}. On peut alors rigidifier $M_1^{\mathrm{loc}}(p)$ grâce au diagramme

$$\begin{tikzcd}
M_1^{\mathrm{loc}}(p) \arrow[d] & M_1^{+}(p) \arrow[l] \arrow[d] \\
M_0^{\mathrm{loc}}(p) & M_0^{+}(p) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

dans lequel $M_0^+(p)$ est le $\mathbb{G}_m^{g+1}$-torseur sur $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$ paramétrant pour tout $0 \leq i \leq 2g-1$ les trivialisations symplectiques du fibré inversible $\mathcal{W}_i/\mathcal{W}_{i+1}$ avec les notations de la remarque **3.2.3**, et $M_1^+(p) \to M_0^+(p)$ paramètre les racines $(p-1)$-èmes des fonctions qui se déduisent du déterminant de

$$[\mathcal{W}_{i+1}/t \cdot \mathbb{V}_{i+1}[[t]] \to \mathcal{W}_i/t \cdot \mathbb{V}_i[[t]]]$$

par ces trivialisations. Le morphisme $\pi : M_1^+(p) \to M_0^+(p)$ est à présent représentable et $M_1^+(p)$ est donc simplement un schéma quasi-projectif de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. De plus, π est fini et plat muni d'une action de $(\mathbb{F}_p^*)^{g+1}$ transitive dans les fibres et est un torseur étale sous ce groupe en fibre générique.

On obtient finalement un diagramme à flèches lisses de même dimension relative

(**3.2**.B)
$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M}_1^{\mathrm{loc}}(p) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_1(p) & & M_1^{\mathrm{loc}}(p) \end{tikzcd}$$

duquel on déduit que $X_1(p)$ et $M_1^{\mathrm{loc}}(p)$ ont mêmes hensélisés stricts en des points géométriques provenant du même point de $\widetilde{M}_1^{\mathrm{loc}}(p)$. De plus, $\mathrm{R}\Psi_{X_1(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $\mathrm{R}\Psi_{M_1^{\mathrm{loc}}(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$ ont même image inverse tirée à

$$\widetilde{M}_1^{\mathrm{loc}}(p)\,.$$

De même, le complexe

$$\pi_*\,\mathrm{R}\Psi_{M_1^+(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$$

est en un certain sens un modèle de $\mathrm{R}\Psi_{X_1(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$.

3.2.6. *Fonctions centrales.* — Notre but est à présent d'expliquer comment le complexe

$$\pi_*\,\mathrm{R}\Psi_{M_1^+(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$$

définit *via* la trace semi-simple de Frobenius une fonction centrale dans l'algèbre de Hecke pro-t-Iwahori pour le groupe $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}((t)))$ pour tout entier $r \geq 1$. Notons $I^+(\mathbb{F}_{p^r}) \subset I(\mathbb{F}_{p^r})$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures strictes modulo t. Lorsque r varie il s'agence en un ind-schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ que nous noterons toujours I^+. Il est facile de voir que l'action de l'ind-schéma ind-lisse I s'étend de $M_0^{\mathrm{loc}}(p) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ à $M_0^+(p) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et à $M_1^+(p) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et que le faisceau pervers décalé

$$\pi_*\,\mathrm{R}\Psi_{M_1^+(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$$

est I-équivariant sur $M_0^+(p) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. De plus, on obtient grâce à la remarque **3.2.3** un plongement

$$\iota^+ \ :\ M_0^+(\mathbb{F}_{p^r}) \ \hookrightarrow\ \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}((t)))\,/\,I^+(\mathbb{F}_{p^r})$$

qui commute à l'action de $I^+(\mathbb{F}_{p^r})$.

Remarque 3.2.7. — *Même si la source et le but de ι^+ sont naturellement munis d'une action du plus gros groupe $I(\mathbb{F}_{p^r})$, le plongement ι^+ ne commute pas à cette action. Notons en fait $\nu : I(\mathbb{F}_{p^r}) \to (\mathbb{F}_{p^r}^*)^{g+1}$ le morphisme donné par la diagonale des matrices. Son noyau est donc $I^+(\mathbb{F}_{p^r})$. Il résulte alors facilement des identifications que les propriétés d'équivariance de ι^+ par rapport à l'action de $I(\mathbb{F}_{p^r})$ sont données par la formule $\iota^+(g \cdot x) = \nu(g)g \cdot \iota^+(x)$ pour tout $g \in I^+(\mathbb{F}_{p^r})$ et tout $x \in M_0^+(\mathbb{F}_{p^r})$.*

Ainsi la trace semi-simple de Frobenius agissant sur $\pi_* \, \mathrm{R}\Psi_{M_1^+(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$ définit par prolongement par zéro *via* ι^+ une fonction notée $\tau_{M_1^+(p)}$ sur

$$I^+(\mathbb{F}_{p^r}) \setminus \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}((t))) \; / \; I^+(\mathbb{F}_{p^r})$$

à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. C'est l'élément que nous cherchions dans l'algèbre de Hecke pro-t-Iwahori.

Remarque 3.2.8. — *L'algèbre de Hecke pro-t-Iwahori du groupe t-adique* $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}((t)))$ *est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Hecke pro-p-Iwahori du groupe p-adique* $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_{p^r})$ *où* $\mathbb{Q}_{p^r}$ *désigne l'extension non ramifiée de degré r de* $\mathbb{Q}_p$. *En effet ces deux algèbres sont décrites par générateurs et relations qui ne font tous deux intervenir que le corps résiduel et le système de racines affine qui est le même dans le cas t et p-adique. Cela permet de transférer les traces semi-simples de Frobenius à des algèbres de Hecke d'inégale caractéristique, ce qui est plus logique par exemple pour compter les points des variétés de Shimura. Un phénomène analogue apparaissait déjà dans le cas Iwahori.*

Théorème 3.2.9. — *La fonction* $\tau_{M_1^+(p)}$ *est dans le centre* $\mathcal{Z}_{I^+}$ *de l'algèbre de Hecke pro-t-Iwahori de* $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}((t)))$.

La démonstration suit les lignes de celle donnée par Gaitsgory dans le cas iwahorique. Notons W^{aff} le groupe de Weyl affine de $\mathrm{GSp}(\mathbb{F}_{p^r}((t)))$. Il s'agit premièrement de géométriser une base

$$(e_{w,\mathrm{t}})_{w \in W^{\mathrm{aff}}, \mathrm{t} \in (\mathbb{F}_{p^r}^*)^{g+1}}$$

de l'algèbre de Hecke pro-t-Iwahori *via* des faisceaux pervers équivariants $(\mathcal{E}_{w,\mathrm{t}})_{w,\mathrm{t}}$ sur un schéma $N_0^+(p)$ analogue à $M_0^+(p)$ mais qui, au contraire de ce dernier, est aussi singulier en caractéristique nulle qu'en caractéristique p. Cette équisingularité permet de montrer que

$$\mathrm{R}\Psi_{N_0^+(p)}(\mathcal{E}_{w,\mathrm{t}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)) \; = \; \mathcal{E}_{w,\mathrm{t}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \, .$$

Il faut ensuite relever le produit de convolution de l'algèbre de Hecke en une opération associative $*$ envoyant deux faisceaux pervers équivariants sur un complexe de la catégorie dérivée. On montre de plus que $*$ commute avec les foncteurs de cycles proches $\mathrm{R}\Psi_{M_0^+(p)}$ et $\mathrm{R}\Psi_{N_0^+(p)}$. Le but est d'établir géométriquement la commutation de

$$\pi_* \, \mathrm{R}\Psi_{M_1^+(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$$

et de $\mathcal{E}_{w,\mathrm{t}}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ pour tout (w,t). Grâce aux points précédents, il suffit de montrer la commutation géométrique de $\pi_*(\mathbb{Q}_\ell)$ et de $\mathcal{E}_{w,\mathrm{t}}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ pour tout (w,t). Mais cette commutation est relativement aisée à établir grâce aux propriétés d'équivariance et repose *in fine* sur le théorème des restes chinois.

3.2.10. *Description de la fonction.* — Il se trouve que le centre $\mathcal{Z}_{I^+}$ de l'algèbre de Hecke pro-t-Iwahori est explicite. En effet, lorsque χ parcourt les caractères de $(\mathbb{F}_{p^r}^*)^{g+1}$ à valeurs ℓ-adiques, la convolution par des idempotents particuliers défini un monomorphisme d'algèbre

$$\mathcal{Z}_{I^+} \;\hookrightarrow\; \prod_\chi \mathcal{Z}_{I,\chi}$$

où $\mathcal{Z}_{I,\chi}$ est le centre de l'algèbre des fonctions à support compact sur $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}((t)))$ qui se transforment *via* χ sous l'action à droite et gauche de $I(\mathbb{F}_{p^r})$. De plus d'après l'isomorphisme de Roche, pour tout caractère χ de $\mathbb{F}_{p^r}^*$, l'algèbre commutative $\mathcal{Z}_{I,\chi}$ est isomorphe au centre $\mathcal{Z}_{I_{H_\chi}}$ de l'algèbre de Hecke-Iwahori d'un groupe endoscopique H_χ de GSp_{2g}. L'isomorphisme de Bernstein permet enfin de relier $\mathcal{Z}_{I_{H_\chi}}$ à l'algèbre de Hecke sphérique pour le groupe t-adique H_χ, et l'isomorphisme de Satake élucide la structure de cette dernière algèbre comme une algèbre de polynômes symétriques invariants. On obtient finalement pour tout $\chi : (\mathbb{F}_{p^r}^*)^{g+1} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$ un sous-groupe W_χ du groupe de Weil vectoriel $W = \mathfrak{S}_g \ltimes (\mathbb{Z}/2)^g$ de GSp_{2g}, un isomorphisme

$$\mathcal{Z}_{I,\chi} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathbb{Q}}_\ell[X_*(T)]^{W_\chi}$$

et une injection

$$\prod_\chi \mathrm{comp}_\chi \ : \ \mathcal{Z}_{I^+} \hookrightarrow \prod_\chi \bar{\mathbb{Q}}_\ell[X_*(T)]^{W_\chi}$$

où $T = \mathbb{G}_m^{g+1}$ est le tore déployé maximal standard de GSp_{2g} et $X_*(T)$ son réseau des cocharactères. Le théorème suivant est dans [**HS**].

Théorème 3.2.11. — *La fonction* $\mathrm{comp}_\chi(\tau_{M_1^+(p)})$ *est nulle si*

$$\chi : (\mathbb{F}_{p^r}^*)^{g+1} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$$

ne se factorise pas par la norme de $\mathbb{F}_{p^r}$ *à* $\mathbb{F}_p$ *et égale à une constante multipliée par* $\sum_{w\in W}[w\cdot\mu]$ *si* χ *se factorise par la norme, où* $\mu \in X_*(T)$ *est le cocharactère minuscule associé à la variété de Siegel.*

La démonstration de ce théorème est combinatoire : on montre qu'il existe en fait une unique fonction centrale dans $\mathcal{Z}_{I^+}$ supportée sur le produit des éléments μ-admissibles de Kottwitz-Rapoport par $(\mathbb{F}_{p^r}^*)^{g+1}$ et de valeurs explicites sur le produit des éléments de translation par $(\mathbb{F}_{p^r}^*)^{g+1}$. Les valeurs de $\tau_{M_1^+(p)}$ sur les éléments de translation sont faciles à calculer grâce à la théorie de Serre-Tate sur le lieu ordinaire.

3.2.12. Généralisations. — Le faisceau pervers décalé

$$\pi_* \, \mathrm{R}\Psi_{M_1^+(p)}(\mathbb{Q}_\ell)$$

est muni d'une action de $(\mathbb{F}_p^*)^{g+1}$ sur $M_0^+(p)$ et se décompose donc en composantes isotypiques indexées par les charactères

$$\chi : (\mathbb{F}_p^*)^{g+1} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$$

que l'on voit comme des charactères de $(\mathbb{F}_{p^r}^*)^{g+1}$ en les factorisant par la norme de $\mathbb{F}_{p^r}$ à $\mathbb{F}_p$. On montre alors que la fonction $\tau_{M_1^+(p),\chi}$ correspondante à la partie χ-isotypique est dans $\mathcal{Z}_{I,\chi}$. De plus, l'image par comp_χ de cette fonction est égale à une constante multipliée par

$$\sum_{w\in W} [w \cdot \mu] \, .$$

On peut également construire géométriquement des éléments de $\mathcal{Z}_{I^+}$ qui ont une image non nulle dans $\mathcal{Z}_{I,\chi}$ lorsque $\chi : (\mathbb{F}_{p^r}^*)^{g+1} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$ ne se factorise pas nécessairement *via* la norme de $\mathbb{F}_{p^r}$ à $\mathbb{F}_p$. Il suffit pour cela de remplacer $M_1^+(p)$ par le schéma correspondant sur $M_0^+(p)$ où l'on extrait non pas une racine $(p-1)$-ème mais une racine (p^r-1)-ème des fonctions obtenues à partir de déterminants.

On peut enfin construire des éléments de $\mathcal{Z}_{I^+}$ qui ont une image par comp_1 plus compliquée qu'une constante multipliée par $\sum_{w\in W}[w\cdot\mu]$ où μ est le cocharactère minuscule associé à la variété de Siegel. Il suffit pour cela de définir des analogues « élargis » de $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$, $M_0^+(p)$ et $M_1^+(p)$ dépendant d'un entier $n^+ \geq 1$ et d'un entier $n^- \leq 0$. L'analogue élargi

$$M_0^{\mathrm{loc},n^\pm}(p)$$

de $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$ est par exemple défini comme dans la remarque **3.2.3** mais en paramétrant des chaînes

$$t^{n^+} \cdot \mathbb{V}_\bullet[[t]] \subset \mathcal{W}_\bullet \subset t^{n^-} \cdot \mathbb{V}_\bullet[[t]]\,.$$

L'union des $M_0^{\mathrm{loc},n^\pm}(p)$ pour $n^+ \to +\infty$ et $n^- \to -\infty$ est alors un ind-schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ dont la fibre générique est canoniquement isomorphe à la grassmannienne affine de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_p((t)))$ et la fibre spéciale à la variété de drapeaux affines pour $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_p((t)))$. Puisque la grassmannienne affine permet de géométriser l'algèbre de Hecke sphérique [**MV**], on voit que pour tout cocharactère dominant $\mu \in X_*(T)$, il existe n^+ et n^- assez grands et un faisceau pervers équivariant ℓ-adique $\mathcal{A}_\mu$ sur

$$M_0^{\mathrm{loc},n^\pm}(p)$$

qui soit naturellement associé au caractère $ch(V_\mu) \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell[X_*(T)]^W$ de la représentation algébrique de plus haut poids μ du groupe dual de GSp_{2g}. Notons $\mathcal{A}_\mu^+$ l'image inverse de $\mathcal{A}_\mu$ sur

$$M_0^{+,n^\pm}(p)$$

qui est pervers décalé. Continuons de désigner par $\pi : M_1^{+,n^\pm}(p) \to M_0^{+,n^\pm}(p)$ le morphisme fini et plat entre schémas élargis. La fonction trace semi-simple du Frobenius sur

$$\pi_*\,\mathrm{R}\Psi_{M_1^{+,n^\pm}(p)}(\pi^*\mathcal{A}_\mu^+)$$

définit alors une fonction τ_μ sur $I^+(\mathbb{F}_{p^r}) \setminus \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}((t)))\,/\,I^+(\mathbb{F}_{p^r})$. Le théorème suivant est dans [**HS**].

Théorème 3.2.13. — *La fonction τ_μ est centrale dans $\mathcal{Z}_{I^+}$. À des scalaires près, on a $\mathrm{comp}_1(\tau_\mu) = ch(V_\mu)$. Pour tout caractère $\chi : (\mathbb{F}_{p^r}^*)^{g+1} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$ qui ne se factorise pas via la norme de $\mathbb{F}_{p^r}$ à $\mathbb{F}_p$, on a $\mathrm{comp}_\chi(\tau_\mu) = 0$.*

Conjecture 3.2.14. — *Pour tout caractère $\chi : (\mathbb{F}_{p^r}^*)^{g+1} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$ qui se factorise via la norme de $\mathbb{F}_{p^r}$ à $\mathbb{F}_p$, on a $\mathrm{comp}_\chi(\tau_\mu) = ch(V_\mu)$ à des constantes près.*

Conformément au théorème **3.2.11**, le cas minuscule de cette conjecture est connu. Il doit être possible de la prouver en général pour des variétés de Shimura unitaires dont le groupe en p est GL_n en décomposant tout poids dominant en somme de poids minuscules, puis en utilisant des propriétés de multiplicativité de nos constructions.

On peut aussi décomposer le faisceau pervers décalé

$$\pi_*\,\mathrm{R}\Psi_{M_1^{+,n^\pm}(p)}(\pi^*\mathcal{A}_\mu^+)$$

sous l'action de $(\mathbb{F}_p^*)^{g+1}$ et obtenir pour tout charactère $\chi : (\mathbb{F}_p^*)^{g+1} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$ la fonction trace semi-simple de Frobenius sur la partie χ-isotypique

$$\tau_{\mu,\chi} \;:\; I^+(\mathbb{F}_{p^r}) \setminus \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_{p^r}((t)))\,/\,I^+(\mathbb{F}_{p^r}) \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell\,.$$

Le théorème suivant est dans [**HS**].

Théorème 3.2.15. — *La fonction $\tau_{\mu,\chi}$ est centrale dans $\mathcal{Z}_{I,\chi}$.*

Conjecture 3.2.16. — *Les éléments* $\mathrm{comp}_\chi(\tau_{\mu,\chi})$ *et* $ch(V_\mu)$ *coïncident à des constantes près dans* $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[X_*(T)]^{W_\chi}$.

Le cas minuscule de cette conjecture est donc connu. La validité de la conjecture impliquerait qu'on dispose d'une géométrisation de la restriction à $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[X_*(T)]^W$ de l'inverse de l'isomorphisme de Bernstein et Roche

$$\mathcal{Z}_{I,\chi} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathbb{Q}}_\ell[X_*(T)]^{W_\chi} .$$

Cela généraliserait les travaux de Gaitsgory évoqués dans la remarque **3.2.2**.

Remarque 3.2.17. — *Nous avons utilisé une définition de* $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$ *qui dépend du choix d'une représentation fidèle de* GSp_{2g} *pour définir les modèles locaux en niveau pro-p-iwahorique. Pappas et Zhu* [**PZ**] *ont récemment fourni une description intrinsèque de* $M_0^{\mathrm{loc}}(p)$ *qui a l'avantage de se généraliser par exemple aux groupes exceptionnels. Existe-t-il une généralisation de leurs travaux en niveau pro-p-iwahorique ? C'est l'objet de la thèse de Liu Shi Nan.*

Remarque 3.2.18. — *Les résultats de la partie 3 se généralisent comme dans les remarques* ***2.2.6*** *et* ***2.3.8***.

4. Relèvement de formes de Siegel

Passons à l'étude des sections de fibrés en droites sur les variétés de Siegel, qui sont par définition les formes modulaires de Siegel. Nous nous intéressons dans cette partie à l'éventuelle différence entre formes définies directement modulo p et formes en caractéristique nulle ensuite réduites modulo p, ainsi qu'aux applications en théorie de Hida.

4.1. En poids parallèle. — Rappelons que $X(n) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ désigne la variété de Siegel de niveau auxiliaire n premier à p et qu'on a noté ω_A le fibré en droites des formes volumes invariantes sur la variété abélienne universelle A sur X. Il s'étend en un fibré en droites toujours noté ω_A sur toute compactification toroïdale $X(n)^{tor}$ ainsi que sur la compactification minimale $X(n)^*$.

Les formes de Siegel de niveau n et de poids $k \in \mathbb{Z}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ sont par définition les éléments de $\mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p),\, \omega_A^k)$ et les formes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ ceux de $\mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \omega_A^k)$. Ces deux groupes ne dépendent pas du choix de la compactification toroïdale. Il existe une flèche de réduction modulo p

$$\mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p),\, \omega_A^k) \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \omega_A^k)$$

qui est injective et il est naturel de chercher des conditions garantissant sa surjectivité. Notons $D \subset X(n)^{tor}$ le diviseur de Cartier de bord et $\omega_A^k(-D)$ le sous-faisceau de ω_A^k formé des sections nulles sur D. On cherche également des conditions garantissant la surjectivité de

$$\mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p),\, \omega_A^k(-D)) \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \omega_A^k(-D))\,.$$

Un argument cohomologique évident montre que ces questions reviennent à savoir si le H^1 de $X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ à valeurs dans ω_A^k et $\omega_A^k(-D)$ a ou non de la p-torsion. On est ainsi conduit à tenter de trouver des conditions permettant de garantir l'annulation du H^1 de $X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ à valeurs dans ω_A^k et $\omega_A^k(-D)$, où même de toute la cohomologie supérieure.

Le cas $g = 1$ des courbes modulaires est bien connu [**Kat**] et résulte simplement du théorème de Riemann-Roch. On trouve que les flèches précédentes sont des isomorphismes dès que $k \geq 2$.

Remarque 4.1.1. — *Déjà lorsque $g = 1$, il existe d'après Mestre des formes cuspidales de poids* 1 *modulo p qui ne se relèvent pas en caractéristique nulle. Nous verrons des conséquences arithmétiques de ce phénomène dans le paragraphe* ***5.4.2****.*

L'ingrédient qui généralise naturellement le théorème de Riemann-Roch aux cas des variétés de dimension supérieure est le théorème d'annulation de Kodaira. Cherchons donc à l'appliquer dans notre cas. C'est possible d'après Deligne et Illusie [**DI**] car la variété $X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ se relève évidemment en caractéristique nulle. Des variantes logarithmiques de ce théorème dues par exemple à Ogus [**Og**] permettent de traiter le cas de variétés à singularités toriques, ce qui est le cas de $X(n)^{tor}$. Il faut de plus exhiber un faisceau inversible ample sur $X(n)^{tor}$. Cela est possible grâce à Shepherd-Barron [**SB**] dans un cas très particulier, celui où la décomposition polyhédrale donnant naissance à la compactification toroïdale est la première décomposition de Voronoï. On obtient alors facilement le théorème suivant [**St3**]. Notons que dans cette référence, il n'était formulé que pour $g = 2$ ou 3 car c'est seulement dans ces cas que $X(n)^{tor}$ est lisse pour la première décomposition de Voronoï, et cette lissité permet d'utiliser directement le théorème de Raynaud-Deligne-Illusie et non pas celui d'Ogus.

Théorème 4.1.2. — *Supposons $k > g + 1$ et $p \geq g(g + 1)/2$. La flèche de réduction induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p),\, \omega_A^k(-D)) \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \omega_A^k(-D))\,.$$

Remarque 4.1.3. — *Le faisceau ω_A étant ample sur la compactification minimale $X(n)^*$, on peut être tenter d'utiliser de théorème de Kodaira sur $X(n)^*$. Ce n'est pas possible car cette dernière n'a pas de singularités toriques.*

Remarque 4.1.4. — *Dans* [**LS1**]*, Lan et Suh ont simultanément utilisé une méthode très proche mais valable pour les variétés de Shimura PEL lisses générales : ils ont remplacé l'emploi du théorème de Kodaira par celui d'un avatar du théorème de Kawamata-Viehweg dû à Esnault et Viehweg* [**EV**]*, ce qui leur permet de s'affranchir du théorème de Shepherd-Barron.*

4.2. En poids quelconque. — Soient $\kappa = (k_1 \geq \cdots \geq k_g)$ une famille d'entiers relatifs. Il définit un poids dominant de GL_g donc une représentation algébrique de ce groupe par laquelle on peut contracter le torseur Ω_A sur $X(n)^{tor}$. On obtient un faisceau localement libre noté Ω^κ sur $X(n)^{tor}$ dont les sections globales sont les formes de Siegel de poids κ. Lorsque $\kappa = (k, \cdots, k)$ on a $\Omega^\kappa = \omega_A^k$ et c'est le cas où Ω^κ est de rang un. En général, les mêmes questions de relèvement de la caractéristique p à la caractéristique nulle se posent pour les formes de poids κ, éventuellement cuspidales.

Le théorème de Kodaira ne s'applique alors plus directement, et ses variantes concernant les fibrés de rang supérieur comme le théorème d'annulation de Le Potier ne nous sont d'aucune utilité car elles ne permettent d'annuler le H^i cohérent que pour i supérieur au rang du fibré et nous souhaitons annuler le H^1.

La réponse est fournie par un théorème d'Illusie [**Il**] reposant sur une généralisation de la théorie de Deligne-Illusie à des coefficients provenant de familles semi-stables. Les familles que nous devons considérer ici sont fournies par les variétés de Kuga-Sato, c'est à dire les compactifications des puissances du schéma semi-abélien universel A sur $X(n)^{tor}$. Ces compactifications ont été également construites par Faltings et Chai et dépendent de choix combinatoires supplémentaires. Malheureusement, contrairement à ce qui a été souvent cru dans la littérature, il n'est absolument pas clair – et probablement faux – qu'on puisse supposer ces compactifications semi-stables sur $X(n)^{tor}$. Il faut donc en fait utiliser des généralisations du théorème d'Illusie dues à Ogus [**Og**].

Remarque 4.2.1. — *Ogus se place dans le cadre de la géométrie logarithmique et suppose dès le début tous les morphismes de type Cartier. Malheureusement les compactifications des variétés de Kuga-Sato ne sont pas de type Cartier sur $X(n)^{tor}$. On est donc conduit à reprouver à la main certains résultats de* [**Og**] *dans notre cas, ce qui constitue un obstacle technique assez rédhibitoire.*

On obtient alors le théorème suivant [**St4**, th.1.3].

Théorème 4.2.2. — *Supposons $n > 12$, $k_g > g+1$ et $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. Alors l'application de réduction modulo p induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p),\, \Omega^\kappa(-D)) \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \Omega^\kappa(-D))\,.$$

Pour prouver ce théorème, il faut combiner le théorème de Shepherd-Barron [**SB**] exhibant un fibré inversible ample bien précis sur la compactification $X(n)^{tor}$ associée à la première décomposition de Voronoï, les généralisations d'un théorème d'Ogus (voir la remarque **4.2.1**) permettant d'annuler la cohomologie cohérente à valeurs dans des gradués pour la filtration de Hodge d'un F-T-cristal et la théorie du complexe BGG permettant d'isoler Ω^κ dans de tels gradués. C'est d'ailleurs l'hypothèse de poids cohomologique $k_g > g+1$ qui permet à Ω^κ d'apparaître dans le complexe BGG.

Remarque 4.2.3. — *La même démonstration permet de traiter le cas des variétés de Shimura PEL compactes et lisses d'une manière même plus simple puisqu'on n'a pas besoin d'utiliser le théorème de Shepherd-Barron* [**SB**]. *De plus, les subtilités de géométrie logarithmique de* [**Og**] *au bord ne posent plus de problème. Cette stratégie a été trouvée simultanément par Lan et Suh dans* [**LS2**]. *Ils ont de plus réussi à traiter le cas lisse non compact général sans utiliser de théorèmes de Shepherd-Barron mais en généralisant simultanément le théorème d'Ogus et un théorème de Esnault et Viehweg (voir la remarque 4.1.4). Lan et Suh ont appliqué les théorèmes de relèvement de formes modulaires et d'annulation de la cohomologie cohérente à une toute autre question que la classicité en théorie de Hida : ils en ont déduit d'intéressants théorèmes d'annulation de la cohomologie étale de torsion.*

Remarque 4.2.4. — *Harris* [**H2**] *a déduit de tels énoncés d'annulation des théorèmes de relèvement modulaire en cohomologie cohérente dans le cas de variétés de Shimura PEL compactes lisses. La remarque* ***2.3.4*** *permet de traiter également le cas des variétés de Siegel et, en généralisant, le cas de variétés de Shimura PEL lisses de type (A) ou (C) attachées à un groupe sur $\mathbb{Q}$ qui est sur $\mathbb{Q}_p$ restriction des scalaires de groupes symplectiques ou linéaires sur des extensions non ramifiées de $\mathbb{Q}_p$.*

Remarque 4.2.5. — *Il serait intéressant d'enlever l'hypothèse $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$ dans le théorème précédent. En effet, lorsque p est fixé, cette hypothèse restreint le domaine des poids κ permis à une « bande » autour des poids diagonaux, donc à un ensemble fini de poids modulo les poids diagonaux.*

Remarque 4.2.6. — *On ne peut pas espérer ôter l'hypothèse de cuspidalité dans le théorème 4.2.2. Les invariants de Hasse partiels* [**Pi1**] *sont par exemple des formes modulaires modulo p qui sont non cuspidales et de poids non scalaire. De telles formes ne peuvent pas se* *relever en caractéristique nulle. De plus, si le théorème 4.2.2 s'étendait au cas non-cuspidal, on pourrait étendre à ce même cas toute la théorie de Hida. Cela donnerait la possibilité de déformer inconditionnellement des séries d'Eisenstein en des formes cuspidales, ce qui contredirait la philosophie des conjectures de Bloch et Kato. L'origine de l'apparition de cette hypothèse de cuspidalité dans la démonstration des théorèmes 4.1.2 et 4.2.2 provient par exemple du fait que le faisceau dualisant de $X(n)^{tor}$ est isomorphe par Kodaira-Spencer à $\omega_A^{g+1}(-D)$.*

4.3. Application à la théorie de Hida. — Ce paragraphe constitute une première approche des questions de classicité de formes modulaires p-adiques, qui seront abordée plus en détail dans la partie 5. Historiquement, c'est également la première fois que je me suis intéressé à ce sujet.

La variété de Siegel $X(n) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ sans niveau en p contient un ouvert privilégié, le lieu ordinaire $X(n)^{ord} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ qui est en fait la fibre spéciale d'un ouvert $X(n)^{ord}$ de la complétion formelle de $X(n)$ le long de sa fibre spéciale. La tour d'Igusa est alors le $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z}_p)$-torseur sur $X(n)^{ord}$ obtenu en trivialisant la partie multiplicative du groupe de Barsotti-Tate universel $A[p^\infty]$ sur $X(n)^{ord}$. Le lieu ordinaire et la tour d'Igusa se prolongent canoniquement aux compactifications toroïdales $X(n)^{tor}$.

Les formes modulaires p-adiques de Katz sont des fonctions sur la tour d'Igusa qui sont vecteurs propres généralisés pour l'action de $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z}_p)$ et leur poids est donné par la représentation de $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z}_p)$ *via* laquelle se fait l'action. L'avantage des formes de Katz est leur possibilité de varier continument lorsque leur poids varie continument pour la topologie p-adique. Une question centrale devient alors de savoir si, lorsque le poids est entier donnée par $\kappa = (k_1 \geq \cdots \geq k_g) \in \mathbb{Z}^g$, la forme est classique c'est-à-dire une section de $\mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p), \Omega^\kappa)$. Cette question est bien trop imprécise dans cette formulation et la réponse générale ne peut qu'en être « non ».

Une des grandes découvertes d'Hida a été de comprendre qu'une simple condition appelée « ordinarité » permettait de répondre favorablement à la question, sous des hypothèses additionnelles de cuspidalité et de régularité du poids κ. L'ordinarité a trait à plusieurs opérateurs de Hecke en p notés $U_{p,1}, \cdots, U_{p,g-1}$ et $U_p = U_{p,g}$. On dit qu'une forme de Katz est ordinaire si elle est propre pour tous les $U_{p,i}$ de valeur propre inversible dans $\bar{\mathbb{Z}}_p$. Hida montre alors que l'espace engendré par les formes propres de poids fixé est un $\mathbb{Z}_p$-modules de type fini. De plus, l'ordinarité d'une forme de Katz f pour $U_{p,1}, \cdots, U_{p,g-1}$ de poids $\kappa = (k_1, \cdots, k_g)$ entier tel que $k_1 > \cdots > k_g$ garantit que f est en fait une section du faisceau localement libre de rang fini Ω^κ sur $X(n)^{tor,ord}$.

La question de la classicité revient alors à se demander si des hypothèses additionnelles comme la cuspidalité, l'ordinarité pour U_p ou le fait que k_g soit assez grand impliquent le prolongement de f du lieu ordinaire à tout $X(n)^{tor}$. Il est possible de voir que si $k_g > g+1$ et f est ordinaire pour U_p, elle s'étend modulo p à tout $X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. L'argument repose sur un contrôle de la divisibilité de certaines formes modulaires en caractéristique p par l'invariant de Hasse [**St4**, prop.1.6].

Remarque 4.3.1. — *Ce contrôle de divisibilité est lui-même facilité par la fonction degré de Fargues* [**F1**]*, qui sera appelée à jouer un rôle fondamental dans les questions suivantes de classicité (voir la partie 5).*

Il est alors aisé d'en déduire le théorème suivant [**St4**, th.1.1] en appliquant le lemme de Nakayama topologique.

Théorème 4.3.2. — *Soit f une forme modulaire de Katz de poids $\kappa = (k_1 > \cdots > k_g)$ entier tel que $k_g > g+1$ et $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. Supposons f ordinaire et cuspidale et $n > 12$. Alors f est classique sur $X(n)^{tor}$.*

Remarque 4.3.3. — *Hida avait prouvé un théorème analogue* **[Hi]** *sans donner de borne précises du type $k_g > g+1$ et $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. Il supposait que le vecteur $(k_1, \cdots, k_g) \in \mathbb{R}^g$ est suffisamment loin de l'origine, « suffisamment loin » ne dépendant que de la droite engendrée par $(k_1, \cdots, k_g)$. Pour démontrer ce théorème, Hida utilisait l'annulation de Serre sur la compactification minimale, d'où la nécessité de translater par une grande puissance du faisceau ample ω_A, et un théorème de changement de base pour les images directes entre compactification toroïdale et minimale qui demande l'hypothèse de cuspidalité. Nous retrouverons ce théorème de changement de base pour les images directes dans la partie 6.*

5. Classicité de formes surconvergentes

5.1. Le cas déployé. — L'étude des formes surconvergentes de pente finie a été initiée par Coleman. Elles généralisent la théorie des formes ordinaires de Hida, comme nous allons le voir. Notons $X_0(p,n)^{mul,tor}$ l'ouvert de la complétion formelle de $X_0(p,n)^{tor}$ le long de sa fibre spéciale sur lequel le groupe H_g est multiplicatif. Notons $\mathcal{X}_0(p,n)^{mul,tor}$ la variété rigide obtenue comme fibre générique de $X_0(p,n)^{mul,tor}$ et $\mathcal{X}_0(p,n)^{tor}$ la variété rigide associée à $X_0(p,n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$. Une forme modulaire surconvergente algébrique de poids $\kappa = (k_1 \geq \cdots \geq k_g) \in \mathbb{Z}^g$ est par définition une section de Ω^κ définie sur un voisinage strict de $\mathcal{X}_0(p,n)^{mul,tor}$ dans $\mathcal{X}_0(p,n)^{tor}$. L'opérateur de Hecke U_p agit sur l'espace des formes surconvergentes algébriques.

Contrairement au cas des formes ordinaires, il n'est pas facile de définir géométriquement les formes surconvergentes de poids non entier. C'est possible d'après les travaux d'Andreatta, Iovita et Pilloni **[AIP]** qui définissent pour tout poids p-adique κ un système projectif abstrait

$$\mathcal{W}^\kappa = \varprojlim_w \mathcal{W}^\kappa_w$$

de type Fréchet. Chaque $\mathcal{W}^\kappa_w$ est un faisceau en modules de Banach sur un voisinage strict de $\mathcal{X}_0(p,n)^{mul,tor}$ dans $\mathcal{X}(p,n)^{tor}$ dépendant de w. On appelle formes surconvergentes analytiques de poids κ la limite sur w des sections de $\mathcal{W}^\kappa_w$ définies sur un voisinage strict éventuellement plus petit. Remarquons que si κ est entier, le faisceau $\mathcal{W}^\kappa_w$ contient Ω^κ mais n'est pas de rang fini. Au contraire, l'inclusion $\Omega^\kappa \subset \mathcal{W}^\kappa_w$ est fibre à fibre l'inclusion d'une induite algébrique dans une induite localement analytique de rayon d'analycité locale w. Ainsi les notions de formes surconvergentes algébriques et analytiques ne coïncident pas pour les poids entiers.

L'espace des formes modulaires surconvergentes analytiques est munis d'opérateurs de Hecke $U_{p,1}, \cdots, U_{p,g-1}$ et $U_p = U_{p,g}$ et nous dirons qu'une forme est de pente finie pour un de ces opérateurs si elle est propre de valeur propre non nulle. Andreatta, Iovita et Pilloni montrent en utilisant la théorie du complexe BGG localement analytique qu'une forme surconvergente analytique de poids κ entier est une forme surconvergente algébrique si elle est de pente finie pour $U_{p,1}, \cdots, U_{p,g-1}$. Cela généralise donc un énoncé dont nous avons parlé en théorie de Hida.

La question de la classicité de formes modulaires surconvergentes devient alors de savoir si une forme surconvergente algébrique de pente finie pour U_p et de poids suffisamment régulier s'étend en une section de Ω^κ sur $\mathcal{X}_0(p,n)^{tor}$. Le théorème suivant a été prouvé en collaboration avec Pilloni [**PS2**]. Il généralise un théorème de Coleman [**Co**] lorsque $g = 1$ et de Pilloni [**Pi3**] quand $g = 2$.

Théorème 5.1.1. — *Soit f une forme modulaire surconvergente algébrique de poids $\kappa = (k_1 \geq \cdots \geq k_g) \in \mathbb{Z}^g$ qui est propre pour U_p de valeur propre $\alpha_p \in \bar{\mathbb{Z}}_p$. Notons v la valuation de $\bar{\mathbb{Z}}_p$ normalisée par $v(p) = 1$. Si $k_g > v(\alpha_p) + g(g+1)/2$ la forme f est classique sur $\mathcal{X}_0(p,n)^{tor}$.*

Remarque 5.1.2. — *Nous avons en fait prouvé dans* [**PS2**] *un analogue de ce théorème pour toutes les variétés de Shimura PEL associées à un groupe déployé en p. Cela inclut le cas des variétés de Hilbert-Siegel associées à GSp_{2g}/F où F est un corps totalement réel dans lequel p est totalement décomposé, ou bien le cas de variétés de Shimura unitaires associées à un corps CM dans lequel p est totalement décomposé.*

La démonstration du théorème **5.1.1** ne généralise pas celle de Coleman lorsque $g = 1$ mais plutôt une démonstration postérieure trouvée par Buzzard [**Bu**] et Kassaei [**Ka1**], qui consiste à étendre progressivement le domaine de définition de f par des techniques de géométrie rigide. Une étape préliminaire est donc de quantifier le plus précisément possible la différence entre $\mathcal{X}_0(p,n)^{mul,tor}$ et $\mathcal{X}_0(p,n)^{tor}$. Cela est rendu possible par la fonction degré de Fargues. Cette fonction est un invariant numérique des schémas en groupes fini et plats sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$, elle détecte le caractère étale ou multiplicatif en étant nulle ou maximale, et elle se comporte remarquablement vis-à-vis des modifications. Elle définit donc une application

$$\deg \; : \; \mathcal{X}_0(p,n)^{tor} \longrightarrow [0,g] \cap \mathbb{Q}$$

qui est localement la valuation d'une fonction analytique et qui associe à un point x le degré du groupe quasi-fini et plat $H_{g,x}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$.

Remarque 5.1.3. — *Le groupe $H_{g,x}$ n'est fini et plat que lorsque A_x est une variété abélienne à bonne réduction, c'est à dire hors du tube du bord. Toutes les propriétés de la fonction degré s'étendent néanmoins sans problème au tube du bord.*

On a $\mathcal{X}_0(p,n)^{mul,tor} = \deg^{-1}(g)$ et un système cofinal de voisinages stricts est de la forme $\deg^{-1}[g-\varepsilon, g]$ pour $\varepsilon \to 0$. L'observation fondamentale de Buzzard a été de constater que U_p augmentait strictement le degré hors des degrés entiers. Ainsi les itérés de U_p tendent à accumuler $\deg^{-1}]g-1,g]$ sur un voisinage strict où est défini f. L'équation fonctionnelle $f = U_p(f)/\alpha_p$ et ses itérés permettent alors de définir f sur $\deg^{-1}]g-1,g]$.

On cherche ensuite à étendre f au tube d'un ouvert U de $X_0(p,n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ dont le complémentaire est de codimension ≥ 2. Puisque les composantes irréductibles de $X_0(p,n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ sont normales d'après [**Go**], cela suffira à étendre f à tout $\mathcal{X}_0(p,n)^{tor}$. Ce bon ouvert s'obtient comme union des strates ordinaires de p-rang g, de celles de p-rang $g-1$ et de l'intersection de certaines strates de Kottwitz-Rapoport de p-rang $g-2$ avec des strates d'Ekedahl-Oort d'un type supergénéral. Isoler U et notamment sa partie la plus délicate formée de l'intersection des strates de Kottwitz-Rapoport et de Ekedahl-Oort, repose sur le versant combinatoire de la théorie du modèle local. De nombreux calculs effectués par Görtz à l'ordinateur nous ont ainsi été utiles. Le prolongement de f à U est effectué *via* une technique d'approximations successives connue sous le nom de séries de Kassaei, qui convergent grâce à l'hypothèse $k_g > v(\alpha_p) + g(g+1)/2$.

Remarque 5.1.4. — *La démonstration du théorème* ***5.1.1*** *nécessite de recoller différentes séries de Kassaei avec le prolongement précédent de f. Il est pour cela important de définir* *les séries de Kassaei non seulement sur U mais également sur des voisinages stricts du lieu ordinaire. Cela utilise la théorie du sous-groupe canonique dans sa version la plus facile, qui ne nécessite aucune borne explicite.*

Remarque 5.1.5. — *La démonstration originelle du théorème de Coleman a ensuite été généralisée par Johansson* [**J**] *et par Tian et Xiao* [**TX**]. *Bien que la démonstration de* [**J**] *et* [**TX**] *soit écrit dans pour les variétés de Hilbert (éventuellement compactes), elle s'étend sans trop de difficulté au cas des variétés de Siegel.*

Remarque 5.1.6. — *Les formes ordinaires cuspidales de Hida sont en fait surconvergentes d'après* [**Pi2**]. *Le théorème de classicité **5.1.1** englobe donc le théorème **4.3.2** avec des bornes légèrement différentes (mais l'hypothèse $\sum_i(k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$ n'est pas présente dans le théorème **5.1.1**). Remarquons que le théorème **4.3.2** a été formulé sans niveau en p alors que le théorème **5.1.1** concerne le niveau iwahorique en p. Toutefois sous l'hypothèse $k_1 > \cdots > k_g > g+1$, une forme classique de niveau iwahorique en p est vieille en p, cela résultant par exemple de la compatibilité locale-globale pour les représentations galoisiennes associées aux formes de Siegel. Une subtilité est que la surconvergence des formes ordinaires cuspidales repose elle-même sur un théorème de classicité. On peut toutefois utiliser le théorème sans borne de Hida auquel il a été fait allusion dans la remarque **4.3.3**.*

Remarque 5.1.7. — *Aucune hypothèse de cuspidalité n'est nécessaire dans le théorème **5.1.1**. Cette hypothèse est par contre nécessaire lorsqu'on cherche à construire des familles de formes surconvergentes et à prouver que la formation de ces familles commute à tout changement de base sur l'espace des poids. Cela est fait dans* [**AIP**] *grâce à un théorème d'annulation relative qu'on retrouvera dans 6 et qui est fortement inspiré des techniques de Hida auxquelles il a été fait référence dans la fin de la remarque **4.3.3**.*

5.2. Sous-groupes canoniques partiels. — Les résultats de ce paragraphe ont été obtenus en commun avec Pilloni [**PS1**]. Ils ne serviront probablement jamais à rien mais nous ont paru importants à l'époque dans le but de recoller diverses séries de Kassaei à la manière de ce qui a été esquissé dans la remarque **5.1.4**.

Soit Z une strate de p-rang r de $X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Le groupe de Barsotti-Tate $A[p^\infty]$ sur $X(n) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ admet donc un dévissage à trois crans sur Z, le sous-objet étant multiplicatif de hauteur r et le quotient étale de hauteur r. De plus ce sous-objet s'étend au bord de $X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Par rigidité des tores, le sous-objet multiplicatif se relève uniquement en un sous-groupe $H^{\mathrm{can},r}$ de $A[p]$ fini et plat de rang p^r sur le tube $]Z[$ de Z dans $\mathcal{X}(n)^{tor}$. Nous appellerons $H^{\mathrm{can},r}$ le sous-groupe canonique partiel de rang p^r car lorsque $r = g$, on retrouve le sous-groupe canonique de Lubin et Katz. La question est de savoir si $H^{\mathrm{can},r}$ surconverge. Le théorème suivant est le théorème principal de [**PS1**].

Théorème 5.2.1. — *Le sous-groupe $H^{\mathrm{can},r}$ de $A[p]$ surconverge sur un voisinage strict de $]Z[$ dans le tube $]\bar{Z}[$ de l'adhérence de Z.*

Notons $X_0'(p,n)$ le schéma sur $X(n)$ qui paramètre des sous-groupes finis et plats totalement isotropes $H_r \subset A[p]$ de rang p^r. Comme dans le théorème **2.1.2**, il admet des compactifications toroïdales $X_0'(p,n)^{tor}$. La démonstration du théorème **5.2.1** résulte aisément d'un résultat général de Berthelot [**Be**] lorsqu'on réalise que le morphisme d'oubli $X_0'(p,n)^{tor} \to X(n)^{tor}$ est étale sur le lieu où H_r est multiplicatif. Cet caractère étale est évident hors du bord et résulte du diagramme **2.1**.B au bord.

5.3. Le cas Hilbert. — Quittons désormais les variétés de Siegel. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux variétés de Hilbert qui sont relatives à un corps totalement réel F de degré d dans lequel p est inerte. Nous désignerons par $X(n) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ la variété de Hilbert de niveau principal en n. Elle paramètre les schémas abéliens de genre d munis d'une action de $\mathcal{O}_F$, de certaines polarisations et d'une structure de niveau pleine en n. D'après Rapoport [**Ra**], elle admet une compactification toroïdale $X(n)^{tor}$ sur lesquelles le schéma abélien universel A s'étend en un schéma semi-abélien muni d'une action de $\mathcal{O}_F$ et encore noté A. Cette compactification dépend bien sûr d'un choix combinatoire que nous fixerons. Notons $X_0(p,n) \to X(n)$ l'espace de modules des sous-groupes finis et plats H de $A[p]$ qui sont des $\mathcal{O}_F/p$-modules localement libres de rang un. Il admet également une compactification toroïdale $X_0(p,n)^{tor}$.

Nous changerons désormais tous les schémas de base à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ où K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant tous les plongements de F dans $\bar{\mathbb{Q}}_p$. On identifie de plus ces plongements avec $\mathbb{Z}/d$ grâce au Frobenius. Le faisceau ω_A admet alors une action de $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K$ et se décompose donc en $\omega_A = \oplus_{i=1}^d \omega_{A,i}$. On appelle forme de Hilbert de poids $\kappa = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ et de niveau iwahorique en p les sections globales de

$$\omega^\kappa = \bigotimes_i \omega_{A,i}^{\otimes k_i}$$

sur $X_0(p,n)^{tor}$. Désignons par $\mathcal{X}_0(p,n)^{tor}$ la fibre générique rigide de la complétion formelle de $X_0(p,n)$ le long de sa fibre spéciale et $\mathcal{X}_0(p,n)^{mul,tor}$ la fibre générique de l'ouvert formel sur lequel H est multiplicatif. Les formes surconvergentes de Hilbert de poids $\kappa = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ sont alors les sections de ω^κ définies sur un voisinage strict de $\mathcal{X}_0(p,n)^{mul,tor}$ dans $\mathcal{X}_0(p,n)^{tor}$. On dispose de l'action d'un opérateur de Hecke U_p sur ces formes surconvergentes. Le théorème suivant est le résultat d'un travail en collaboration avec Pilloni [**PS3**]. Lorsque $d = 2$ il est dû simultanément à Tian [**Ti**].

Théorème 5.3.1. — *Soit f une forme modulaire de Hilbert surconvergente de poids $\kappa = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ qui est propre pour U_p de valeur propre $\alpha_p \in \bar{\mathbb{Z}}_p$. Si $k_i > d + v(\alpha_p)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d$, la forme f est classique dans $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_0(p,n)^{tor}, \omega^\kappa)$.*

Remarque 5.3.2. — *Les théorèmes **5.1.1** et **5.3.1** n'ont pas d'autre intersection que le cas des courbes modulaires. En effet, le théorème **5.3.1** est relatif à une variété de Shimura associée à un groupe dont le groupe dérivé est $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{SL}_2$ qui n'est pas déployé sur $\mathbb{Q}_p$ si $F \neq \mathbb{Q}$. Bijakowski a en fait unifié les théorèmes **5.1.1** et **5.3.1** en les généralisant au cas des variétés de Shimura PEL de type (A) et (C) associées à un groupe non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$. Il a d'ailleurs généralisé la démonstration du théorème **5.3.1** et pas celle de **5.1.1**.*

Remarque 5.3.3. — *On montre un théorème analogue dans le cas où p est seulement non ramifié dans F. Il faut alors partitionner $\mathbb{Z}/d$ selon les différentes places $\pi_1, \cdots, \pi_r$ au-dessus de p en $\mathbb{Z}/d = [1, \cdots, d_1] \cup [d_1 + 1, \cdots, d_1 + d_2] \cup \cdots \cup [d - d_r + 1, d]$ où d_i est le degré résiduel de π_i. On dispose dans ce cas de r opérateurs de Hecke $U_{\pi_1}, \cdots, U_{\pi_r}$ et de r valeurs propres $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \bar{\mathbb{Q}}_p$. Les conditions de classicité seront alors $\inf_{1 \leq i \leq d_1} k_i > d_1 + v(\alpha_1), \cdots, \inf_{d-d_r+1 \leq i \leq d} k_i > d_r + v(\alpha_r)$.*

La démonstration du théorème **5.3.1** partage bien sûr des lignes communes avec celle du théorème **5.1.1**. On procède selon la méthode de Buzzard et Kassaei par prolongement analytique. La fonction degré est ici $\deg : \mathcal{X}_0(p,n)^{tor} \to [0,d] \cap \mathbb{Q}$ et on a bien $\mathcal{X}_0(p,n)^{mul,tor} = \deg^{-1}(d)$. La grande différence avec le cas déployé est que plusieurs composantes irréductibles de $X_0(p,n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ – toutes sauf deux en fait – sont non ordinaires. Ainsi il peut paraître délicat de définir des séries de Kassaei sur le tube d'un gros ouvert de $X_0(p,n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$.

On commence par remarquer que dans ce cas la fonction degré se décompose naturellement en somme de fonctions degré partiel $\deg_1, \cdots, \deg_d$. Ces fonctions admettent une interprétation élémentaire : comme le groupe H est un $\mathbb{F}_{p^d}$-schéma en groupes de Raynaud [**Ray**], il admet des d paramètres de Raynaud et les degrés partiels sont juste les valuations p-adiques de ces paramètres. Chacune des fonctions $\deg_i$ prend ses valeurs dans $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ et l'on obtient finalement une application Deg de $\mathcal{X}_0(p,n)^{tor}$ dans le multicube $[0,1]^d$. Le lieu multiplicatif $\mathcal{X}_0(p,n)^{mul,tor}$ est l'antécédent du sommet $\{1\}^d$ et les tubes des strates ouvertes des différentes composantes irréductibles de $X_0(p,n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ sont égaux aux antécédents des différents sommets du multicube.

On se rend alors compte que si $x \in \mathcal{X}_0(p,n)^{tor}$ est tel qu'il existe $y \in U_p(x)$ avec $\deg(y) = \deg(x)$, l'élément $\mathrm{Deg}(x)$ est un sommet de $[0,1]^d$. De plus y est unique parmi les points $z \in U_p(x)$ tel que $\deg(z) = \deg(x)$. Il correspond donc à un unique sous-groupe H_x^{sp} de $A_x[p]$ que nous appelons sous-groupe « spécial ». Il joue à bien des égards le rôle du sous-groupe canonique et est d'ailleurs égal à ce dernier lorsque $\mathrm{Deg}(x) = \{0\}^g$, ce qui correspond à une des deux composantes irréductibles génériquement ordinaires de $X_0(p,n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Soit Z un sommet de $[0,1]^d$. Notons $\mathrm{Deg}^{-1}(Z)^{sp}$ le lieu des $x \in \mathrm{Deg}^{-1}(Z)$ tels qu'il existe $y \in U_p(x)$ avec $\deg(y) = \deg(x)$. Par unicité, la famille des H_x^{sp} s'interpole en un groupe de Raynaud H^{sp} sur $\mathrm{Deg}^{-1}(Z)^{sp}$. Ce groupe permet de définir des séries de Kassaei sur $\mathrm{Deg}^{-1}(Z)^{sp}$ exactement de la même manière que le permettait le sous-groupe canonique sur le tube ordinaire ou les sous-groupes canoniques partiels sur les tubes des strates de p-rang > 0. Ces séries permettent alors de mener à bien l'étape de prolongement analytique et sont d'ailleurs responsables de l'hypothèse $k_i > v(\alpha_p) + d$ intervenant dans l'énoncé du théorème **5.3.1**, alors que les séries de Kassaei usuelles définies sur le lieu ordinaire convergeraient sous l'hypothèse plus faible $\sum_i k_i > v(\alpha) + d$.

Remarque 5.3.4. — *Bijakowski a notamment généralisé dans sa thèse le théorème* ***5.3.1*** *au cas où p est ramifié dans F. Il a même étendu cela au cas de variétés de Shimura PEL de type (A) et (C).*

5.4. Classicité et conjecture d'Artin. — Soit F un corps totalement réel dans lequel p peut cette fois être ramifié. Supposons par contre pour simplifier qu'il existe une unique place π divisant p dans F. Notons d le degré de F, e son indice de ramification en p et r le degré résiduel. Notons $X(n) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ le modèle entier de Deligne-Pappas de la variété de Hilbert pour F. Notons $X_0(\pi,n) \to X(n)$ l'espace de modules des sous-groupes de Raynaud H pour $\mathbb{F}_{p^r}$ dans $A[\pi]$. Il existe encore des compactifications toroïdales [**Ra**] $X(n)^{tor}$ et $X_0(\pi,n)^{tor}$. Désignons comme d'habitude par $\mathcal{X}(n)^{tor}$ et par $\mathcal{X}_0(\pi,n)^{tor}$ les variétés rigides associées. On dispose du lieu ordinaire $\mathcal{X}(n)^{ord,tor}$ et du lieu ordinaire multiplicatif $\mathcal{X}_0(\pi,n)^{mul,tor}$ et donc de la notion de formes de Hilbert surconvergentes de poids un, qui sont les sections de ω_A définies sur un voisinage strict de $\mathcal{X}_0(\pi,n)^{mul,tor}$. L'opérateur U_p est maintenant remplacé par un opérateur de Hecke U_π.

Remarque 5.4.1. — *Les variétés de Hilbert sont associées au sous-groupe* G^* *de* $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathrm{GL}_2)$ *formé des matrices dont le déterminant est dans* $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}^*$. *L'opérateur de Hecke* U_π *serait associé à la matrice* $\mathrm{diag}(\varpi, 1)$ *où* ϖ *est un générateur local de* π *et cette matrice n'est pas dans* G^* *si* $\pi \neq p$. *C'est qu'en vérité l'opérateur de Hecke* U_π *est mal défini dans ce cas sur la variété de Hilbert. Le problème provient du choix des représentants du groupe de classe restreint de* F

nécessaire à la définition de $X(n)$: l'application de U_π fait passer d'un choix de représentants à un autre. Notons $\mathcal{O}_F^{*,+}$ les unités totalement positives, $\mathcal{O}_{F,n}^*$ celles congrues à un modulo n et

$$\Delta = \mathcal{O}_F^{*,+}/(\mathcal{O}_{F,n}^*)^2$$

qui est un groupe fini agissant sur $X(n)$. L'opérateur U_π devient bien défini lorsqu'on le restreint aux formes invariantes par l'action de Δ.

Un champ de Hilbert associé au groupe $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathrm{GL}_2)$ est sous-jacent à cette subtilité. Ce champ admet une présentation par $X(n)$ et est muni d'une action de U_π mais cette action ne se relève pas à la présentation. Se restreindre aux formes Δ-invariantes sur $X(n)$ revient à considérer les formes modulaires sur le champ de Hilbert. Un phénomène analogue apparaîtra à chaque fois qu'on considère une variété de Shimura PEL relative à un corps totalement réel qui n'est pas $\mathbb{Q}$.

5.4.2. Classicité. — La question qui nous occupe est celle de la classicité des formes surconvergentes de poids un. Une condition nécessaire est l'ordinarité : si f est classique, propre pour les opérateurs de Hecke hors $n\pi$ et vecteur propre généralisé de U_π, ses valeurs propres généralisées sont toutes de valuation nulle. Toutefois l'ordinarité n'est pas une condition suffisante pour la classicité et ce phénomène est relié à l'existence de formes modulaires ordinaires de poids un modulo p qui ne se relèvent pas en caractéristique nulle. De telles formes se relèvent en fait en des formes de Hida ordinaires non classiques.

Remarque 5.4.3. — *En termes de représentations galoisiennes, le problème est que toute les représentations $\rho : G_F = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ ordinaires en π et de poids de Hodge-Tate nuls ne sont pas de De Rham. Ce phénomène ne peut pas exister lorsqu'on se place dans le cas de poids de Hodge-Tate distincts, ce qui réexplique la dichotomie entre les formes de poids un et celles de poids ≥ 2.*

Grâce à la théorie du sous-groupe canonique, on dispose d'un morphisme de Frobenius φ agissant sur les formes surconvergentes. Disons qu'une forme surconvergente f est de pente fini généralisée s'il existe un polynôme P de terme constant non nul tel que $P(U_\pi)$ annule f. Le théorème suivant est démontré en collaboration avec Pilloni [**PS4**] et généralise un travail de Buzzard et Taylor [**BT**] lorsque $F = \mathbb{Q}$. Il est dû à Kassaei [**Ka2**] dans le cas où $e = 1$ et à Pilloni [**Pi4**] dans le cas où $e \leq p-1$ ou dans le cas $e = p$ et $r = 1$.

Théorème 5.4.4. — *Soit f une forme modulaire surconvergente de poids un telle que $\varphi(f)$ est de pente finie généralisée. Alors f est classique et ancienne en π.*

La démonstration de ce théorème est assez longue et délicate et nous en donnons un aperçu simplifié. Notons $p_2 : X_0(\pi, n) \to X(n)$ le morphisme qui envoie (A, H) sur A/H. On a alors $\varphi(f) = p_2^*(f)$ où f est descendue par le morphisme d'oubli $p_1 : X_0(\pi, n) \to X(n)$ grâce à la théorie du sous-groupe canonique.

Remarque 5.4.5. — *En toute rigueur le morphisme p_2 n'est pas défini car se pose le même problème que dans la remarque **5.4.1**. Son action sur les formes Δ-invariantes est par contre bien définie.*

On prolonge $\varphi(f)$ à la Buzzard [**Bu**] en utilisant l'hypothèse de pente finie. Un phénomène nouveau apparaît dans le cas ramifié : on ne peut prolonger $\varphi(f)$ automatiquement qu'au lieu $\deg^{-1}]d-1/e,d]$ de $\mathcal{X}_0(\pi,n)^{tor}$ et non pas à $\deg^{-1}]d-1,d]$. En fait, il existe un lieu intermédiaire

$$\deg^{-1}[d-1/e,d] \subset \Lambda \subset \deg^{-1}]d-1/e,d]$$

maximal sur lequel on peut prolonger $\varphi(f)$ à la Buzzard. Il faut ensuite vérifier que $\varphi(f)$ descend toujours par p_2 sur $p_2(\Lambda)$. Cela résulte d'un argument de conservation des composantes connexes. On obtient donc une forme que nous noterons f sur $p_2(\Lambda)$ et par image inverse une forme $\varphi(f)$ sur $p_2^{-1}(p_2(\Lambda))$. Il se trouve que ce dernier ensemble est plus gros que Λ. On peut alors réitérer l'étape de prolongement à la Buzzard et prolonger $\varphi(f)$ à une zone $\Lambda' \subset \mathcal{X}_0(\pi,n)^{tor}$ encore plus grande. On vérifie également par un argument de composante connexe que $\varphi(f)$ descend toujours par p_2 en f sur $p_2(\Lambda')$. Il se trouve que $p_2(\Lambda)$ est suffisament gros pour recouvrir le tube d'un ouvert de $X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ dont le complémentaire est de codimension ≥ 2. Par normalité de $X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$, on trouve donc que f s'étend à tout $\mathcal{X}(n)^{tor}$ ce qui conclut la démonstration.

Remarque 5.4.6. — *Il faut en fait remplacer $\mathcal{X}(n)^{tor}$ par son avatar en géométrie de Berkovich. En effet, il est important dans la démonstration d'utiliser la compacité d'un sous-ensemble de points spéciaux et cette compacité est valable en géométrie de Berkovich mais pas de Tate. Le prix à payer réside dans l'étude des groupes de Barsotti-Tate sur des anneaux d'entiers de corps qui ne sont pas des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$, et qui ne sont donc pas redevables du théorème de pleine fidélité de Tate. C'est un des points clé de* **[PS4]**.

5.4.7. Formes compagnons. — La difficulté pour appliquer le théorème consiste à trouver des formes f surconvergentes de poids un propres pour les opérateurs de Hecke hors $n\pi$ telles que $\varphi(f)$ soit de pente finie généralisée pour U_π. D'après la conclusion du théorème **5.4.4**, une telle hypothèse ne peut être vérifiée que si ρ_f est cristalline en π, c'est-à-dire non ramifiée.

Soit donc f_α une forme modulaire surconvergente de poids un propre pour les opérateurs de Hecke hors $n\pi$ et propre pour U_π de valeur propre α. On suppose le premier coefficient de Fourier de f_α égal à un. On suppose également que la représentation p-adique ρ_{f_α} vérifie la liste d'hypothèses suivante, certaines étant habituelles dans la théorie des systèmes de Taylor-Wiles-Kisin :

- **i.** la représentation ρ_{f_α} est non ramifiée en π,
- **ii.** la représentation ρ_{f_α} est non ramifiée ou purement unipotente en toute place de F,
- **iii.** la représentation $\bar\rho_{f_\alpha}$ est triviale en π et en les places où ρ_{f_α} est unipotente non triviale,
- **iv.** la représentation $\bar\rho_{f_\alpha}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ est irréductible, où ζ_p est une racine primitive p-ème de l'unité,
- **v.** $p > 2$ et si $p = 5$ et l'image projective de $\bar\rho_{f_\alpha}$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ alors le degré de $F(\zeta_5)$ sur F est égal à 4.

Des techniques de formes compagnons basées sur la théorie de Taylor-Wiles-Kisin **[Ki2]** et utilisant des travaux non publiés de Taylor permettent alors de construire une autre forme f_β surconvergente de poids un, de premier coefficient de Fourier égal à un, propre pour les opérateurs de Hecke hors de $n\pi$, telle que $\rho_{f_\beta} = \rho_{f_\alpha}$ et que

$$U_\pi(f_\beta) = \beta \cdot f_\beta$$

si $\rho_{f_\alpha}(\mathrm{Frob}_p)$ a deux valeurs propres distinctes α et β et

$$U_\pi(f_\beta) = \alpha \cdot f_\beta + f_\alpha$$

si $\rho_{f_\alpha}(\mathrm{Frob}_p)$ a ses deux valeurs propres égales à α. Les formes f_α et f_β sont appelées « compagnon » l'une de l'autre.

Remarque 5.4.8. — *Dans le cas où $\rho_{f_\alpha}(\mathrm{Frob}_p)$ a ses deux valeurs propres égales à α, la lettre β désigne donc un symbole abstrait sans signification numérique.*

Posons

$$H = \frac{\alpha \cdot f_\alpha - \beta \cdot f_\beta}{\alpha - \beta}$$

et

$$G = \frac{f_\alpha - f_\beta}{\alpha - \beta}$$

dans le cas de valeurs propres distinctes et

$$H = \alpha \cdot f_\beta - (1-\alpha) \cdot f_\alpha$$

et

$$G = f_\beta - f_\alpha$$

dans le cas de valeurs propres égales. Puisque les valeurs propres de Hecke déterminent les coefficients de Fourier dans le cas du groupe GL_2/F, on peut comparer explicitement les formes G et H et l'on trouve que $G = \varphi(H)$ et que $P(U_\pi)(G) = 0$ avec $P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$ dans le cas de valeurs propres distinctes et $P(X) = (X-\alpha)^2$ dans le cas de valeurs propres égales. On peut donc appliquer le théorème **5.4.4** à $f = H$ et obtenir que H est classique sans niveau en π et que f_α et f_β sont ses deux π-stabilisations classiques de niveau iwahorique en π.

Remarque 5.4.9. — *Même si on savait généraliser le théorème **5.4.4** à des groupes comme $\mathrm{GSp}_4/\mathbb{Q}$, on se heurterait lors des applications au fait que les systèmes de valeurs propres ne déterminent plus les coefficients de Fourier dans ce cas. Avec les notations précédentes, on ne serait plus capable de tester l'analogue de l'égalité $G = \varphi(H)$. Ce problème paraît être l'obstacle le plus important pour montrer la modularité potentielle des surfaces abéliennes en généralisant la méthode de* [**BT**], *tenant compte de* [**BLGGT**].

5.4.10. *Modularité.* — Les travaux de Taylor et ses collaborateurs ([**T2**], [**SBT**], [**BDST**] et [**BT**]) montrent que le théorème **5.4.4** et son application précédente ont des applications à la conjecture d'Artin. On en déduit le théorème suivant, toujours obtenu avec Pilloni dans [**PS4**], et qui repose en grande partie sur ces travaux de Taylor et de ses collaborateurs.

Théorème 5.4.11. — *Soit F un corps totalement réel et $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ une représentation continue irréductible totalement impaire. Elle est associée à une forme de Hilbert cuspidale de poids un. En particulier, $L(\rho, s)$ admet un prolongement holomorphe au plan complexe.*

Remarque 5.4.12. — *Dans le cas où $F = \mathbb{Q}$ et $\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ est non ramifiée ou somme de deux caractères résiduellement distincts, ce théorème est dû à Taylor et ses collaborateurs (*[**T2**], [**SBT**], [**BDST**] *et* [**BT**]*), Khare et Wintenberger* [**KW**] *et Kisin* [**Ki2**]. *Dans le cas où $F \neq \mathbb{Q}$, plusieurs cas particuliers étaient connus (*[**Pi4**], [**Ka2**] *et* [**KST**]*).*

D'après Langlands et Tunnell [**Tu**], on se réduit à traiter le cas où l'image projective de ρ est isomorphe à A_5. On peut de plus remplacer F par une de ses extensions résolubles conservant l'image de ρ par Langlands [**La**]. Voyons ρ comme une représentation à valeur dans $\bar{\mathbb{Z}}_5$ et remplaçons F par une extension résoluble conservant l'image de ρ telle que

i. ρ est non ramifiée en toutes les places de F,

ii. $\bar{\rho}$ est triviale en toutes les places de F divisant 5.

De plus, l'image projective de $\bar{\rho}$ reste isomorphe à A_5 car le noyau de $\mathrm{PGL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_5) \to \mathrm{PGL}_2(\bar{\mathbb{F}}_5)$ est pro-résoluble. Ainsi $\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_5)}}$ reste irréductible et son image n'est pas isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ puisque $A_5 = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$. Les hypothèses du paragraphe **5.4.7** sont donc satisfaites. D'après Shepherd-Barron et Taylor [**SBT**] , la représentation $\bar{\rho}$ est modulaire. Les techniques de relèvement modulaire montrent alors qu'il existe une forme modulaire surconvergente de poids un f_α telle que $\rho_{f_\alpha} = \rho$. De plus, la technique exposée dans le paragraphe **5.4.7** permet de construire une autre forme surconvergente f_β telle que $\rho_{f_\beta} = \rho$ puis de prouver la classicité de f_α et f_β.

On peut également obtenir une version de la conjecture de Fontaine-Mazur en poids de Hodge-Tate nuls. Il s'agit toujours d'un travail en collaboration avec Pilloni [**PS4**].

Théorème 5.4.13. — *Soit F un corps totalement réel, $p > 2$ et $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ une représentation continue, non ramifiée presque partout, de De Rham en les places divisant p et de poids de Hodge-Tate nuls. Supposons que $\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ est irréductible et que si $p = 5$ et $\mathrm{Proj}(\bar{\rho}(G_F) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ alors $[F(\zeta_5) : F] = 4$. Alors ρ est associée à une forme modulaire de Hilbert de poids un et donc en particulier d'image finie.*

Vu le théorème **5.4.11**, il suffit de montrer que ρ est d'image finie. Or les théorèmes de [**BLGGT**] montrent qu'il existe une extension F'/F peut-être non résoluble telle que $\bar{\rho}|_{G_{F'}}$ est modulaire. On peut alors utiliser des théorèmes de relèvement modulaire pour construire deux formes p-adiques f_α et f_β pour GL_2/F' de représentation galoisienne $\rho|_{G_{F'}}$. On raisonne alors comme dans le paragraphe **5.4.7** pour montrer que f_α et f_β sont classiques. En particulier, $\rho_{G_{F'}}$ est d'image finie et ρ l'est également.

Remarque 5.4.14. — *Nous avons utilisé plusieurs changements de base résolubles dans la démonstration des théorèmes **5.4.11** et **5.4.13**. Ces changement de base avaient par exemple pour but de rendre ρ non ramifiée en les places au-dessus de p et introduisent des corps totalement réels arbitrairement ramifiés en p. Toute la force du théorème **5.4.4** était justement de s'accommoder d'une ramification quelconque du corps de base. Au contraire, les travaux* [**Pi4**] *et* [**Ka2**] *ne concernent que les corps faiblement ramifiés en p et on ne peut donc les combiner avec des changements de base résolubles quelconques. C'est pourquoi ils ne permettent pas de prouver le théorème **5.4.11** sous sa forme générale.*

6. Théorème d'annulation relative

Revenons au cas des variétés de Siegel et de leurs compactifications toroïdales et minimales. On dispose d'un morphisme propre birationnel $\pi : X(n)^{tor} \to X(n)^*$ et on s'intéresse au complexe $\mathrm{R}\pi_*(\mathcal{O}_{X(n)^{tor}}(-D))$ où D désigne le diviseur de bord de $X(n)^{tor}$. Ce complexe ne dépend pas du choix combinatoire et permet de comparer les cohomologies cohérentes cuspidales des compactifications toroïdales et minimales. De même, pour tout faisceau automorphe cohérent Ω^κ sur $X(n)^{tor}$, on s'intéresse au complexe $\mathrm{R}\pi_*(\Omega^\kappa(-D))$. La philosophie générale est que ce complexe est concentré en degré zéro, donc que

$$\mathrm{R}^i\pi_*(\Omega^\kappa(-D)) \;=\; 0$$

pour tout $i > 0$. Cela a été montré dans [**AIP**] pour le faisceau trivial et dans [**L2**] pour les faisceaux automorphes quelconques, dans les deux cas par une analyse explicite du morphisme π au bord de la compactification minimale. Notre but est de trouver une preuve plus simple et ayant un goût plus prononcé de géométrie birationnelle, quitte à faire des hypothèses sur la caractéristique de la base. Le théorème suivant est le théorème principal de [**St7**].

Théorème 6.1. — *Soit k un corps de caractéristique nulle ou supérieure à $g(g+1)/2$. On a $\mathrm{R}^i\pi_*(\mathcal{O}_{X(n)^{tor}}(-D))$ pour tout $i > 0$.*

La démonstration est très simple et consiste à combiner l'annulation de Serre sur $X(n)^*$ pour le faisceau ample ω_A, la suite spectrale de Leray pour π et le théorème d'annulation de Kodaira-Raynaud-Deligne-Illusie appliqué à $X(n)^{tor}$ et au faisceau ample $\omega_A^k(-D)$ avec k assez grand. On utilise ici la compactification toroïdale associée à la première décomposition de Voronoï, qui a l'avantage d'avoir un diviseur de bord irréductible en niveau un. C'est pour cette raison que D est relativement ample pour π. Pour une compactification quelconque associée à un choix combinatoire ayant une fonction de polarisation, il existe seulement un diviseur D' de support D qui soit relativement ample pour π, les multiplicités de D' étant données par la fonction de polarisation.

Remarque 6.2. — *En caractéristique nulle, le théorème **6.1** est un cas particulier du théorème d'annulation relative de Grauert-Riemenschneider* [**GR**] *qui dit que le faisceau dualisant d'un schéma propre et lisse n'a pas d'image directe supérieure par un morphisme birationnel. Le théorème de Grauert-Riemenschneider n'est pas prouvé en caractéristique positive, essentiellement à cause de manque de résolution des singularités. Ce qui nous sauve est le fait qu'il existe un diviseur à singularités toriques sur $X(n)^{tor}$ qui soit relativement ample pour π.*

La démonstration précédente s'étend au cas de coefficients automorphes Ω^κ mais il faut remplacer le théorème de Kodaira par un théorème d'annulation qui a été démontré lors de la preuve du théorème **4.2.2** et qui a été montré simultanément par Lan et Suh [**LS3**] dans un cadre plus général. On obtient le résultat suivant, qui résulte d'une collaboration avec Lan [**LS**].

Théorème 6.3. — *Soit $\kappa = (k_1 \geq \cdots \geq k_g) \in \mathbb{Z}^g$ tel que $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. Alors $\mathrm{R}^i\pi_*(\Omega^\kappa(-D)) = 0$ pour tout $i > 0$.*

Remarque 6.4. — *Le théorème **6.3** est valable pour les compactifications construites par Lan* [**L1**] *de toutes les variétés de Shimura PEL lisses. Il est vraisemblablement vrai sur les compactifications des variétés de Shimura de type Hodge, y compris sur leurs modèles entiers construits par Madapusi* [**Ma**] *mais la démonstration n'a pas été rédigée.*

Remarque 6.5. — *Un tel énoncé d'annulation relative a été utilisé à plusieurs reprises dans la littérature récente comme par exemple* [**AIP**], [**ERX**], [**HLTT**] *et* [**TX**]. *Il implique également le changement de base de la formation de $\pi_*(\Omega^\kappa)$ de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ à $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ prouvé originellement par Hida dans le but d'établir son théorème de classicité (voir la remarque 4.3.3). Ce théorème d'annulation s'utilise toujours de la même façon et permet de résoudre la dichotomie suivante : les faisceaux automorphes existent sur la compactification toroïdale $X(n)^{tor}$ mais le faisceau ω_A est ample sur la compactification minimale $X(n)^*$ et le lieu ordinaire découpé par la non annulation de l'invariant de Hasse est donc affine uniquement dans la minimale. La condition de cuspidalité permet donc de passer d'une compactification à l'autre et de gagner* *sur les deux tableaux. Il est absurde d'espérer ôter cette condition, comme nous l'avons déjà dit dans la remarque **4.2.6**.*

7. Cohomologie cohérente et représentations galoisiennes

Dans ce travail en commun avec Pilloni [**PS5**], nous revenons sur de fantastiques travaux récents de Scholze [**So2**] et montrons comment ils permettent de répondre à une question classique. Le but ici est d'associer des représentations galoisiennes aux systèmes de valeurs propres de l'algèbre de Hecke agissant sur diverses théories cohomologiques des variétés de Shimura, en étant capable de relier en presque toutes places les valeurs propres de Frobenius et celles de Hecke. Nous nous concentrons ici sur la cohomologie cohérente.

Considérons à nouveau $X(n) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ la variété de Siegel de genre g avec ses compactifications $X(n)^{tor}$ et $X(n)^*$. Notons D le bord de $X(n)^{tor}$. Soit p un nombre premier. Supposons que $v_p(n) \geq g/(p-1)$ et $v_2(n) \geq 2g$ si $p = 2$, cas auxquels on peut toujours se ramener en augmentant artificiellement le niveau. Soit $\kappa = (k_1 \geq \cdots \geq k_g) \in \mathbb{Z}^g$ et notons comme avant Ω^κ le faisceau localement libre associé sur $X(n)^{tor}$. On s'intéresse alors aux groupes

$$\mathrm{H}^i(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}),\, \Omega^\kappa(-D))$$

pour $i \geq 0$. Ces groupes sont indépendants du choix de la décomposition polyhédrale et sont munis de l'action de l'algèbre de Hecke abstraite $\mathbb{T}^{\mathrm{abs}}$ consistant en les opérateurs de Hecke hors np pour le groupe GSp_{2g}. Leur structure comme module sous cette algèbre est élucidé en termes automorphes par un analogue de la formule de Matsushima [**H1**] qui repose sur des calculs de $(\mathfrak{p}, K)$-cohomologie. On voit notamment intervenir les représentations automorphes de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ qui sont limites non dégénérées de séries discrètes à l'infini et dont le paramètre de Harish-Chandra est relié à κ.

Notons $\mathbb{T}^{\mathrm{cl}}$ le quotient classique de $\mathbb{T}^{\mathrm{abs}}$, c'est-à-dire le meilleur quotient qui agit sur $\mathrm{H}^0(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}),\, \Omega^\kappa(-D) \otimes \omega_A^k)$ pour tout $k \geq 0$. Nous obtenons le théorème suivant [**PS5**].

Théorème 7.1. — *L'algèbre $\mathbb{T}^{\mathrm{abs}}$ agit sur $\mathrm{H}^i(X(n)^{tor} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}),\, \Omega^\kappa(-D))$ via son quotient classique $\mathbb{T}^{\mathrm{cl}}$ pour tout $i \geq 0$.*

Remarque 7.2. — *Boxer* [**Bo**] *a obtenu le même résultat sous des hypothèses légèrement plus restrictives. Voir aussi* [**GG**].

Remarque 7.3. — *Par dualité de Serre, on en déduit le même énoncé en remplaçant $\Omega^\kappa(-D)$ par Ω^κ. Si l'on savait construire des classes de cohomologie cohérente d'Eisenstein de poids non régulier, cela permettrait de généraliser* [**HLTT**] *à des cas non réguliers.*

Remarque 7.4. — *Le théorème **7.1** reste valable pour toutes les variétés de Shimura PEL, et même pour les variétés de Shimura PEL connexes comme celle associée au groupe Sp_{2g}.*

Le théorème **7.1** implique que dès qu'on sait associer des représentations galoisiennes aux systèmes de valeurs propres de Hecke agissant sur le H^0 cohérent de poids vérifiant $\kappa = (k_1 \geq \cdots \geq k_g \geq g+1)$, on peut faire de même pour toute la cohomologie cohérente. D'après de célèbres travaux de Kottwitz, Clozel, Harris, Taylor, Shin, Morel, Chenevier, Arthur et d'autres, c'est le cas lorsqu'on remplace $X(n) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ par une de ses composantes connexe. D'après [**X**] et les généralisations à venir, on s'attend que ce soit même le cas pour $X(n) \times$

Spec($\mathbb{C}$). On obtient donc le théorème suivant grâce à la théorie des pseudo-représentations de Taylor et Chenevier [**Ch**].

Théorème 7.5. — *Soit π une représentation automorphe cuspidale pour* $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ *telle que π_∞ est limite non dégénérée de séries discrètes. Pour tout nombre premier p, il existe une représentation galoisienne $\rho_\pi : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_{2g+1}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ qui est semi-simple, continue, autoduale, non ramifiée hors du produit de p par le niveau de π et telle que la compatibilité locale-globale soit satisfaite aux places non ramifiées.*

Remarque 7.6. — *Ce théorème est déjà intéressant lorsque π_∞ est limite holomorphe de séries discrètes. On retrouve alors des résultats de* [**DS**], [**RT**], [**T1**], [**Gol**] *et* [**GN**] *par une méthode différente.*

Remarque 7.7. — *Le cas $p = 2$ pose en vérité quelques problèmes car nous avons besoin d'un théorème de Fargues* [**F**, th.3] *qui n'est écrit que pour $p > 2$. Fargues nous a indiqué qu'il reste valable pour $p = 2$ (avec des bornes légèrement différentes mais cela n'a aucune importance ici).*

Remarque 7.8. — *Les travaux de Varma* [**Va**] *permettent d'étendre la compatibilité locale-globale aux places de mauvaise réduction différentes de p, à l'étude près du logarithme de monodromie pour lequel on n'obtient qu'une inégalité. La compatibilité locale-globale paraît beaucoup plus dure à obtenir en dehors de certains cas redevables des travaux de Kisin* [**Ki2**] *sur les périodes cristallines. On ne sait pas en général si ρ_π est De Rham en p ni même si elle est Hodge-Tate. On s'attend bien sûr à ce qu'elle le soit et que ses poids soient donnés par κ via une recette faisant intervenir la représentation de dimension $2g + 1$ du groupe dual.*

Remarque 7.9. — *Le théorème* ***7.5*** *admet des généralisations pour le groupe* GL_n *sur des corps totalement réels ou CM grâce à* [**Mo**]. *Étant donné une représentation automorphe cuspidale pour un groupe unitaire forme de* GL_n *qui est limite non dégénérée de séries discrètes à toutes les places infinies, on obtient une représentations dont les poids de Hodge-Tate sont censés avoir des propriétés de faible irrégularité. Pour un corps quadratique imaginaire et n pair, on s'attend par exemple à pouvoir obtenir des poids de Hodge-Tate du type $(\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4 > \cdots > \lambda_{n-1} = \lambda_n)$. Malheureusement, même conjecturalement, cela ne produira jamais de représentations d'Artin si $n > 2$! Pour obtenir des représentations d'Artin, il faudrait étendre le théorème* ***7.5*** *aux limites dégénérées de séries discrètes comme dans le programme de Carayol, et cela semble très difficile.*

La démonstration du théorème **7.1** utilise les modèles étranges de Scholze. Ce sont des modèles entiers de $X(n)^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}_p)$ qui ne sont définis dans [**So2**] que pour $v_p(n)$ assez grand non quantifié et nous montrons dans [**PS5**] qu'ils existent dès $v_p(n) \geq p/(g-1)$ ou $v_2(n) \geq 2g$ si $p = 2$. La construction de ces modèles nécessite l'utilisation des variétés de Siegel de niveau p^∞ et leur caractère perfectoïde ([**So1**], [**So2**]).

Ces modèles ne possèdent ni schéma abélien universel, ni stratification de Newton, ni notion de bord ou d'intérieur. Ils sont en fait construit comme contraction d'un éclatement admissible de $X(n)^* \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$, la contraction comme l'éclatement étant adaptés à l'application de Hodge-Tate du groupe de $A[p^\infty]$ sur $X(n)$. Ces modèles sont munies de C_{2g}^g formes modulaires modulo p extraordinaires, qui sont sections d'un fibré ample et commutent à l'action des opérateurs de Hecke. La cohomologie cohérente des modèles étranges se calculent alors à la Cech grâce au recouvrement affine $(\mathcal{U}_i)_i$ formé par le lieu de non-annulation de ces formes.

Multiplier par des grandes puissances de ces formes permet d'étendre les fonctions définies sur les multi-intersections des $\mathcal{U}_i$ à toute la fibre spéciale du modèle étrange d'une manière $\mathbb{T}^{\mathrm{abs}}$-équivariante. Il suffit de multiplier plus encore et d'utiliser l'amplitude pour relever en caractéristique nulle, auquel cas il devient évident que l'action de $\mathbb{T}^{\mathrm{abs}}$ se factorise par $\mathbb{T}^{\mathrm{cl}}$. Remarquons que comme les modèles étranges n'existent que pour la compactification minimale et les faisceaux Ω^{κ} existent sur la toroïdale, on doit utiliser le théorème **6.3** en caractéristique nulle.

Remarque 7.10. — *Nous montrons en fait que l'action de $\mathbb{T}^{\mathrm{abs}}$ se factorise via $\mathbb{T}^{\mathrm{cl}}$ sur le $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-module de cohomologie cohérente des modèles étranges de Scholze. Boxer* [**Bo**] *montre de son côté le même énoncé pour la cohomologie entière du modèle de Kottwitz usuel. Ces cohomologies ne sont pas directement comparables et nous ne savons pas laquelle des deux est la plus intéressante pour les applications au programme de Calegari et Geraghty* [**CG**]. *Il se révèlera peut-être que la compatibilité locale-globale en p est plus facile à obtenir pour un des deux modèles entiers...*

Articles présentés

[HS] T. Haines et B. Stroh – *Local models and nearby cycles for $\Gamma_1(p)$-level structure*, prépublication (2014).

[LS] K.W. Lan & B. Stroh – *Relative cohomology of cuspidal forms on PEL Shimura varieties*, prépublication (2014).

[PS1] V. Pilloni & B. Stroh – *Sous-groupes canoniques partiels*, Manuscripta Math. **133** (2010).

[PS2] V. Pilloni & B. Stroh – *Surconvergence et classicité : le cas déployé*, prépublication (2013).

[PS3] V. Pilloni & B. Stroh – *Surconvergence et classicité : le cas Hilbert*, prépublication (2013).

[PS4] V. Pilloni & B. Stroh – *Surconvergence, ramification et modularité*, prépublication (2013).

[PS5] V. Pilloni & B. Stroh – *Cohomologie cohérente et représentations galoisiennes*, prépublication (2014).

[St1] B. Stroh – *Compactification de variétés de Siegel aux places de mauvaise réduction*, Bull. Soc. Math. France **138** n° 2 (2010), p. 259-315.

[St2] B. Stroh – *Compactification minimale et mauvaise réduction*, Ann. Inst. Fourier **60** n° 3 (2010), p. 1035-1055.

[St3] B. Stroh – *Relèvement de formes modulaires de Siegel*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 9, p. 3089-3094.

[St4] B. Stroh – *Classicité en théorie de Hida*, Amer. Journal of Math. **135** (2013), no. 4, p. 861-889.

[St5] B. Stroh – *Sur une conjecture de Kottwitz au bord* et Erratum, Annales Éc. Norm. Sup **45** tome 1, p. 143-165.

[St6] B. Stroh – *Mauvaise réduction au bord*, à paraître aux actes de la conférence organisée en l'honneur de Gérard Laumon (2013).

[St7] B. Stroh – *Cohomologie relative des formes cuspidales*, prépublication (2014).

Références

[AM] A. Abbes & F. Mokrane – *Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p-adiques pour les variétés abéliennes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **99** (2004).

[AIP] F. Andreatta, A. Iovita & V. Pilloni – *p-adic families of Siegel modular forms*, à paraître à Annals of Maths. (2014).

[A] J. Arthur – *The endoscopic classification of representations : orthogonal and symplectic groups*, Colloquium Publications of the American Mathematical Society, volume 61.

[BLGGT] T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty & R. Taylor – *Potential modularity and change of weight*, Ann. of Math. **179** (2014), p. 501-609

[Be] P.Berthelot – *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, prépublication 96-03, 1996, disponible sur `perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/`.

[Bo] G. Boxer – *Thèse de doctorat*, en cours de rédaction.

[Bu] K. Buzzard – *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Jour. Am. Math. Soc. **16**, n. 1, p. 29 –55, 2002.

[BDST] K. Buzzard, M. Dickinson, N. Shepherd-Barron & R. Taylor – *On Icosahedral Artin representations*, Duke Math. J. **109** (2001), 283-318.

[BT] K. Buzzard & R. Taylor – *Companion forms and weight* 1 *forms*, Annals of Math. **149**, 1999.

[CG] F. Calegari & D. Geraghty – *Modularity lifting beyond the Taylor-Wiles method*, prépublication (2014).

[Ch] G. Chenevier – *The p-adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group, and pseudorepresentations over arbitrary rings*, Proceedings of the LMS Durham Symposium, Automorphic forms and Galois representations (2011), à paraître.

[Co] R. Coleman – *Classical and overconvergent modular forms*, Invent. Math. **124** (1996).

[dJ] A. J. De Jong – *The moduli space of principally polarized abelian varieties with* $\Gamma_0(p)$*-level structure*, J. Algebraic Geo. **2** (1993), p. 667-688.

[DI] P. Deligne & L. Illusie – « Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham », *Invent. Math.* 89 (1987), n° 2, p. 247–270.

[DS] P. Deligne & J-P Serre – *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4ème série **7**, n. 4 (1974), p. 507-530.

[ERX] M. Emerton, D. Reduzzi & L. Xiao – *Galois representations and torsion in the coherent cohomology of Hilbert modular varieties*, prépublication (2013).

[EV] H. Esnault & E. Viehweg – « Lectures on vanishing theorems », DMV Seminar, vol. 20 (1992), Birkhäuser, Basel.

[EvG] T. Ekedahl & G. van der Geer – *Cycle classes of the E-O stratification on the moduli of abelian varieties*, dans Arithmetic, Algebra and Geometry, Manin-Festschrift, Birkhauser Verlag.

[FC] G. Faltings et C.L Chai – *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse de Mathematik **22** (1990), Springer.

[F1] L. Fargues – *La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*, J. Reine Angew. Math. **645** (2010).

[F] L. Fargues – *La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles*, Annales scientifiques de l'ENS **44**.

[Ga] G. Gaitsgory – *Construction of central elements in the affine Hecke algebra via nearby cycles*, Inventiones **144** n° 2 (2001), p. 253-280.

[Go] U. Görtz – *On the flatness of local models for the symplectic group*, Adv. in Math. **176** (2003).

[Gol] W. Goldring – *Galois representations associated to holomorphic limits of discrete series*, avec un appendice de S.W. Shin, Compositio Math. **150** (2014) p.191-228.

[GG] W. Goldring & D. Geraghty – *Travail en cours de rédaction* (2014).

[GN] W. Goldring & M.H. Nicole – *The μ-ordinary Hasse invariant of unitary Shimura varieties*, prépublication (2013).

[GR] H. Grauert et O. Riemenschneider – *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Raümen*, Inventiones Math. **11**, p. 263-292 (1970).

[HN] T. Haines & B. C. Ngô – *Nearby cycles for local models of some Shimura varieties*, Compositio Math. **133** (2002), p.117-150.

[H1] M. Harris – *Automorphic forms and the cohomology of vector bundles on Shimura varieties*, dans « Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions », vol. 2, Ann Arbor, édité par L. Clozel et J. Milne (1988).

[H2] M. Harris – *The Taylor-Wiles method for coherent cohomology*, J. Reine Angew. Math. **679** (2013), p. 125-153.

[HLTT] M. Harris, K.W. Lan, R. Taylor et J. Thorne – prépublication (2013).

[He] X. He – *Normality and Cohen-Macaulayness of local models of Shimura varieties*, à paraître à Duke Math. Journal (2012).

[Hi] H. Hida – *Control theorems of coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type*, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), no. 1, p. 1–76.

[Il] L. Illusie – *Réduction semi-stable et décomposition de complexes de de Rham à coefficients*, Duke Math. J. **60** (1990), n° 1, p. 139–185.

[J] C. Johansson – *Classicality for small slope overconvergent automorphic forms on some compact PEL Shimura varieties of type C*, Mathematische Annalen **357** no. 1 (2013), p. 51-88.

[KW] C. Khare & J.P. Wintenberger – *Serre's modularity conjecture. I.* Invent. Math. **178** (2009), no. 3, p. 485-504.

[Ka1] P. Kassaei – *A gluing lemma and overconvergent modular forms*, Duke Math. J. **132** (2006).

[Ka2] P. Kassaei – *Modularity lifting in parallel weight one*, J. Amer. Math. Soc. **26** (2013), no. 1, 199–225.

[KST] P. Kassaei, S. Sasaki & Y. Tian – *modularity lifting results in parallel weight one and applications to the Artin conjecture : the tamely ramified case*, à paraître dans Forum of Mathematics, Sigma.

[Kat] N. M. Katz – *p-adic properties of modular schemes and modular forms*, dans « Modular functions of one variable III », Lecture notes in mathematics, vol. 350 (1973), Springer, Berlin

[Ki2] M. Kisin – *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*, Invent. Math. **153** (2) (2003), p. 373-454.

[Ki2] M. Kisin – *Moduli of finite flat group schemes and modularity*, Annals of Math. **170** (3) (2009), 1085-1180.

[KM] F. Knudsen & D. Mumford – *The projectivity of the moduli space of stable curves I : Preliminaries on "det" and "Div"*, Math. Scand. **39** (1976), 19-55.

[L1] K.W. Lan – *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties*, thèse de doctorat, université d'Harvard (2008).

[L2] K.W. Lan – *Compactifications of PEL-type Shimura varieties and Kuga families with ordinary loci*, prépublication (2014).

[LS1] K.W. Lan & J. Suh – *Liftability of mod p cusp forms of parallel weights*, IMRN **8** (2011), p. 1870–1879.

[LS2] K.W. Lan & J. Suh – *Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on compact PEL-type Shimura varieties*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 6, p. 1113–1170.

[LS3] K.W. Lan & J. Suh – *Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on general PEL-type Shimura varieties*, Adv. Math. **242** (2013), p. 228–286.

[La] R. LANGLANDS – *Base Change for GL(2)*, Annals of Math. Studies 96, Princeton University Press, Princeton, 1980.

[Ma] K. MADAPUSI PERA – *Toroidal compactifications of integral models of Shimura varieties of Hodge type*, prépublication (2013).

[MV] I. MIRKOVIC & K. VILONEN – *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Annals of Math. **166** (2007), p. 95-143.

[Mo] C.P. MOK – *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, à paraître dans Memoirs of the American Mathematical Society.

[M1] S. MOREL – *Complexes pondérés des compactifications de Baily-Borel. Le cas des variétés modulaires de Siegel*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), p. 23-61.

[M2] S. MOREL – *On the cohomology of certain non-compact Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies **173**, Princeton University Press.

[M3] S. MOREL – *Complexes mixtes sur un schéma de type fini sur* $\mathbb{Q}$, prépublication (2013).

[Og] A. OGUS – *F-crystals, Griffiths transversality, and the Hodge decomposition*, Astérisque, **221** (1994).

[OT] F. OORT & J. TATE – *Group schemes of prime order*, Ann. Scient. École Norm. Sup. série 4, **3** (1970).

[PZ] G. PAPPAS & X. ZHU – *Local models of Shimura varieties and a conjecture of Kottwitz*, Invent. Math. **194** (2013), no. 1, p. 147 ?254

[Pin] R. PINK – *On ℓ-adic sheaves on Shimura varieties and their higher direct images in the Baily-Borel compactification*, Math. Ann. n° **292** tome 2 (1992).

[Pi1] V. PILLONI – *Arithmétique des variétés de Siegel*, thèse de doctorat (2009), Université Paris 13.

[Pi2] V. PILLONI – *Sur la théorie de Hida pour le groupe GSp_{2g}*, Bull. Soc. Math. Fr. (2011).

[Pi3] V. PILLONI – *Prolongement analytique sur les variétés de Siegel*, Duke Math. J. **175** (2011), p. 167-222.

[Pi4] V. PILLONI – *Formes modulaires p-adiques de Hilbert de poids*, à paraître à Inventiones.

[Ra] M. RAPOPORT – *Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal*, Compositio Math. **36** no. 3 (1978), p. 255-335.

[RZ] M. RAPOPORT & T. ZINK – *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies **141** (1996).

[Ray] M. RAYNAUD – *Schémas en groupe de type (p,p, ...,p)*, Bull. Soc. Math. de France **102** (1974), p.241-280.

[RT] J. ROGAWSKI & J. TUNNELL – *On Artin L-functions associated to Hilbert modular forms of weight 1*, Invent. Math. **74** (1983), p. 1-42.

[SB] N. I. SHEPHERD-BARRON – *Perfect forms and the moduli space of abelian varieties*, Invent. Math. **163** (2006), n° 1, p. 25–45.

[SBT] N.SHEPHERD-BARRON & R.TAYLOR – *Mod* 2 *and mod* 5 *icosahedral representations*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), p. 283-298.

[So1] P. SCHOLZE – *Perfectoid spaces*, Publ. math. de l'IHÉS **116** (2012), n° 1, p. 245-313.

[So2] P. SCHOLZE – *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, prépublication (2013).

[T1] R. TAYLOR – *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke Math. J. **63** (1991), p. 281-332.

[T2] R. TAYLOR – *On icosahedral Artin representations, II* , American Journal of Math. **125** (2003), p. 549-566.

[Ti] Y. Tian – *Classicality of overconvergent Hilbert eigenforms : case of quadratic residue degrees*, à paraître dans Rendiconti del Seminario Matematico della Universit'a di Padova.

[TX] Y. Tian et L. Xiao – *p-adic cohomology and classicality of overconvergent Hilbert modular forms*, prépublication (2013).

[Tu] J. Tunnell – *Artin conjecture for representations of octahedral type*, Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1981), p. 173-175.

[Va] I. Varma – *Local-global compatibility for regular algebraic cuspidal automorphic representations when $\ell \neq p$*, en cours de rédaction.

[Vo] G. Voronoi – *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premier mémoire : sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites*, J. Reine Angew. Math **133** (1908), p. 79–178.

[X] B. Xu – *Endoscopic classification of representations of* $\mathrm{GSp}(2n)$ *and* $\mathrm{GSO}(2n)$, thèse de l'Université de Toronto (2014).

---

15 août 2014

Benoît Stroh • *Courriel :* `stroh@math.univ-paris13.fr`, C.N.R.S, Université Paris 13, LAGA, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse France