Benoît Stroh

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES COMPACTS

Benoît Stroh

15 Septembre 2014

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES COMPACTS

Benoît Stroh

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Ce cours fait suite à MAT556, où l'on a étudié les représentations complexes des groupes finis. Nous allons maintenant étudier les représentations complexes des groupes compacts. Parmi eux figurent des groupes de matrices (le groupe orthogonal O_n, le groupe unitaire U_n) ou des groupes de nature arithmétique comme les nombres p-adiques $\mathbb{Z}_p$ ou le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ des nombres rationnels. La philosophie est que la théorie générale des représentations des groupes finis reste valable pour les groupes compacts : les représentations se décomposent uniquement en somme directe d'irréductibles, les irréductibles sont de dimension finie, il existe une notion de représentation régulière dans laquelle apparaissent toutes les irréductibles avec multiplicité égale à leur dimension.

Lorsque G était un groupe fini, l'argument de base était une moyenne : si un objet n'est pas invariant par G, on peut toujours le moyenner pour le rendre invariant. Ainsi, on peut rendre invariants des produits hermitiens ou des projecteurs sur des sous-espaces stables par G. Cela permet de montrer immédiatement que toute représentation de G est somme directe de ses sous-représentations irréductibles, ce qui est la première propriété clé.

Remarque 1.1. — Une moyenne fait intervenir une division par $\mathrm{Card}(G)$ ce qui est légitime dans les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Cela pose bien sûr problème lorsque G est fini mais qu'on s'intéresse à ses représentations à valeurs dans les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espaces vectoriels. Si p ne divise pas $\mathrm{Card}(G)$, les moyennes sont toujours possibles et la théorie est la même. Si par contre p divise $\mathrm{Card}(G)$ on ne peut plus moyenner. En fait les résultats de base de la théorie complexe ne sont plus vrais dans ce cas : si $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\cdot e_1 \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\cdot e_2$ par la formule $x * e_1 = e_1 + xe_2$, $x * e_2 = e_2$, le sous-espace $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\cdot e_1$ est stable mais n'a pas de supplémentaire stable. D'où l'importance des moyennes.

Comme on peut s'y attendre, les moyennes vont toujours exister lorsque G est un groupe compact et qu'on se restreint aux représentations complexes. Une intégrale remplacera la somme, et le volume de G son cardinal. Encore faut-il construire des mesures sur G qui sont invariantes à droite et gauche : on veut que $\int_G f(x)dx = \int_G f(gx)dx = \int_G f(xg)dx$

pour toute fonction f intégrable sur G et tout $g \in G$. Lorsque G était fini, ces égalités se réduisaient à des réagencements de sommes. La théorie de la mesure de Haar permet de répondre complètement à cette demande.

Remarque 1.2. — Un exemple tout à fait analogue à l'exemple 1.1 explique pourquoi l'hypothèse de compacité est essentielle : soit $G = \mathbb{R}$ vu comme groupe additif. On le fait agir sur $\mathbb{R} \cdot e_1 \oplus \mathbb{R} \cdot e_2$ par $x * e_1 = e_1 + xe_2$ et $x * e_2 = e_2$. Le sous-espace $\mathbb{R} \cdot e_1$ est stable par G mais n'admet pas de supplémentaire stable. Ici le problème vient du fait que G est de mesure infinie et qu'on ne peut donc pas moyenner.

Remarque 1.3. — On a d'ailleurs une variante dans le cas discret non fini, où on ne peut pas non plus moyenner. Soit $G = \mathbb{Z}$. La donnée d'une représentation complexe de G correspond à celle d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un automorphisme T (l'image de $1 \in \mathbb{Z}$). Mais tous les endomorphismes ne se mettent pas sous forme diagonale par blocs ! On remarque que cette représentation se factorise par un quotient fini de $\mathbb{Z}$ si est seulement si T est annulé par le polynôme scindé à racines simples $X^n - 1$, $n \geq 1$, et l'on retrouve un critère usuel de diagonalisation.

On peut alors développer assez rapidement la théorie dans le cas compact. Toutefois, on n'est pas capable dans cette généralité de classifier les représentations irréductibles, ni même d'en obtenir des informations grossières comme leur dimension ou leur caractère. On rencontre déjà cette problématique dans le cas des groupes finis, où ce n'est que pour certaines classes particulières de groupes ($G = \mathfrak{S}_n$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$) qu'on peut obtenir une classification fine.

On se restreindra donc dans un second temps aux groupes de matrices compacts connexes, c'est-à-dire aux sous-groupes compacts connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On obtiendra alors une classification complète des représentations irréductibles. Cette classification est fondamentale en mathématiques : par exemple l'étude très complexe des représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ repose sur deux ingrédients clés : « dériver » ces représentations pour obtenir des représentations de l'algèbre de Lie, objets d'algèbre linéaire enrichie, et restreindre les représentations au groupe compact connexe SO_n.

Il reste à expliquer pourquoi les représentations des groupes compacts sont intéressantes. Considérons le cas le plus simple, où $G = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi \cdot \mathbb{Z}$ qui a le bon goût d'être commutatif et compact. Ses représentations irréductibles sont alors de dimension un, et consistent en les morphismes de groupes $f_n : G \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto e^{inx}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Notons $\hat{G}$ le dual de G c'est à dire l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles unitaires de G. En général ce n'est qu'un ensemble mais comme ici G est abélien, $\hat{G}$ est également un groupe (par produit tensoriel des représentations, si on veut). L'association $n \mapsto f_n$ fournit en fait un isomorphisme $\mathbb{Z} = \hat{G}$.

Remarque 1.4. — On voit apparaître le phénomène suivant, connu sous le nom de dualité de Pontryagin : le dual d'un groupe compact est discret. La réciproque est vraie dans certains cas : groupes abéliens discrets ou groupes finis. On peut donc dire que les groupes finis sont discrets et compacts et leur dual est donc compact et discret, soit fini. C'est une explications philosophique au fait que les groupes finis admettent un nombre fini de représentations irréductibles. Les groupes compacts admettront un nombre infini mais discret (c'est à dire classifié par des paramètres discrets) de représentations irréductibles.

Revenons à $G = \mathbb{S}^1$. L'analogue de la représentation régulière est l'espace des fonctions périodiques $L^2(G)$, sur lequel G agit par translation. Décomposer cette représentation en irréductibles revient à écrire une fonction périodique comme somme des f_n. Étant donné $\varphi \in L^2(G)$ et $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de φ sur f_n est donné par le produit hermitien

$$< \varphi, f_n >_{L^2(G)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cdot \bar{f}_n(x)dx \,.$$

On peut donc reformuler toute la théorie de Fourier périodique en termes de théorie des représentations.

Ainsi étudier les représentations du groupe orthogonal O_n ou du groupe unitaire U_n revient à trouver une généralisation non abélienne de la théorie de Fourier. Il est donc évident que cette étude est primordiale tant en physique qu'en analyse et en géométrie. Elle est de plus extrêmement importante en théorie des nombres, via le programme de Langlands.

Remarque 1.5. — Un des théorèmes les plus importants de la théorie de Fourier ne généralisera pas : il s'agit de l'inversion. En fait lorsque G est abélien compact ou discret, le dual $\hat{G}$ reste un groupe donc on peut parler du bidual $\hat{\hat{G}}$ et montrer que

$$G = \hat{\hat{G}} \,.$$

La transformée de Fourier fait passer d'une fonction sur G à une fonction sur $\hat{G}$ et itérer cette transformée permet alors de revenir à une fonction sur G, qui est la fonction de départ à des constantes et au changement de variable $x \mapsto -x$ près.

Lorsque G est un groupe compact non abélien, $\hat{G}$ n'est qu'un ensemble discret. On ne peut tout simplement pas définir $\hat{\hat{G}}$!

Donnons enfin une illustration concrète de l'intérêt des groupes compacts en physique. Soit $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité. Considérons l'opérateur $\Delta : C^\infty(\mathbb{S}^2) \to C^\infty(\mathbb{S}^2)$ qui envoie une fonction f sur le Laplacien de $\mathbb{R}^3$ évalué en $\tilde{f}$, où $\tilde{f}$ est le prolongement de f à $\mathbb{R}^3 - 0$ de manière constante le long des rayons. Il est naturel de chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de Δ : ce problème intervient par exemple en mécanique quantique lorsqu'on cherche à modéliser l'atome d'hydrogène. La résolution brutale de l'équation $\Delta(f) = \lambda f$ mène à une équation différentielle trop compliquée et il faut procéder différemment.

On peut espérer utiliser les symétries du problème : si on construit un opérateur T agissant sur $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ qui commute à Δ, on sait qu'il suffit de diagonaliser la restriction de Δ à chaque sous-espace propre de T, et ces espaces propres peuvent être simples si T l'est. Un tel opérateur T peut tout simplement être construit en considérant une rotation r de $\mathbb{R}^3$, qui agit sur $\mathbb{S}^2$, et en la faisant agir sur la variable des fonctions, soit $(T \cdot f)(x) = f(r(x))$. Cela ne résout pas notre problème car les sous-espaces propres de T restent de dimension infinie.

On peut alors penser utiliser tous les T simultanément, c'est à dire utiliser l'action du groupe compact SO_3 sur $\mathbb{S}^2$ et sur $C^\infty(\mathbb{S}^2)$. Malheureusement ce groupe est non abélien, et l'on ne peut pas espérer diagonaliser simultanément tous ses éléments agissant sur $C^\infty(\mathbb{S}^2)$. Néanmoins, nous verrons qu'on peut les diagonaliser simultanément par bloc, chaque bloc étant un espace vectoriel V_i explicite de dimension finie. Il suffira finalement de diagonaliser Δ sur chaque V_i, ce qui est du ressort de l'algèbre linéaire élémentaire.

CHAPITRE 2

GROUPES TOPOLOGIQUES

2.1. Généralités

Nous définissons dans ce paragraphe les groupes topologiques, qui sont des objets en groupes dans la catégorie des espaces topologiques, et étudions leurs propriétés de base. Ce faisant, nous rencontrerons des propriétés topologiques un peu inhabituelles : espaces séparés ou non, espaces totalement discontinus.

Définition 2.2. — Un groupe topologique G est un espace topologique qui est un groupe tel que le morphisme $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ est continu.

Dans cette définition, on a muni $G \times G$ de la topologie produit.

Exercice 2.3. — Montrer les points suivants.

i. Un groupe G avec une topologie est un groupe topologique si et seulement si $(x, y) \mapsto x \cdot y$ et $x \mapsto x^{-1}$ sont continus.

ii. Si G est un groupe topologique, $x \mapsto x^{-1}$ est un homéomorphisme de G.

iii. Si Gest un groupe topologique et $x \in G$ est fixé, le morphisme $G \to G$, $y \mapsto x \cdot y$ est un homéomorphisme. De même pour $y \mapsto x \cdot y \cdot x^{-1}$.

Exemple 2.4. — Soit K un corps topologique, c'est à dire un corps tel que $(K, +)$ et $(K^*, \times)$ soient des groupes topologiques. Alors $\mathrm{GL}_n(K)$ est ouvert dans $\mathrm{Mat}_n(K) = K^{n^2}$ donc est muni d'une topologie canonique induite par celle de K. Montrons que c'est un groupe topologique. Le produit des matrices des clairement continu car polynomial en les entrées. L'inversion $\mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$, $A \mapsto A^{-1}$ est également continu puisque $A = 1/\det(A) \cdot {}^t\mathrm{Com}(A)$ et que le déterminant et la comatrice sont continus.

Une vaste classe de groupes topologiques compacts, intéressants pour les applications algébriques et arithmétiques, est fournie par les groupes pro-finis. Voyons cette construction. Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de groupes finis munis de morphismes de groupes $f_{n,m} : G_n \to G_m$ pour tous $n \geq m$ tels que $f_{n,m} \circ f_{m,k} = f_{n,k}$ et $f_{n,n} = \mathrm{id}$ pour tous $n \geq m \geq k$ (il suffit du coup de se donner $f_{n+1,n}$ pour tout n). On dit que $(G_n, f_{n,m})$ forme un système projectif indexé par l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$. Munissons chaque G_n de la topologie discrète et $\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$ de la topologie produit.

Remarque 2.5. — Par définition la topologie produit est la moins fine rendant continue les applications $\prod_n G_n \to G_{n_0}$ pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$. De manière équivalente, les ouverts de $\prod_n G_n$ sont union des produits d'ouverts de G_n pour n dans un ensemble fini d'indice I et des G_m pour $m \notin I$. Ainsi même si la topologie des G_n est discrète, celle de $\prod_n G_n$ ne l'est pas.

Posons $\varprojlim_n G_n$ le sous-ensemble de $\prod_n G_n$ formé des familles $(x_n)_n$ telles que $f_{n,m}(x_n) = x_m$ pour tous $n \geq m$. C'est un sous-groupe fermé de $\prod_n G_n$ et on le munit de la topologie induite. On l'appelle limite projective des G_n et on dit que c'est un groupe pro-fini.

Remarque 2.6. — On peut de même définir la limite projective d'un système indexé par des ensembles ordonnés plus généraux que $\mathbb{N}$, à savoir les ensembles ordonnées filtrants où pour tous (x, y) il existe z tel que $x \leq z$ et $y \leq z$.

Lemme 2.7. — *Le groupe $\varprojlim_n G_n$ est un groupe topologique compact.*

Démonstration. — Par Tychonoff (qui est équivalent à l'axiome du choix), $\prod_n G_n$ est compact et $\varprojlim_n G_n$ aussi. Puisqu'un sous-groupe fermé d'un groupe topologique reste un groupe topologique, $\varprojlim_n G_n$ est bien un groupe topologique. □

Exemple 2.8. — Soit p un nombre premier. Posons $G_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $f_{n,m} : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ la réduction modulo p^m pour tous $n \geq m$. On note $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n$ qu'on appelle groupe des entiers p-adiques. En fait c'est un anneau topologique intègre et on note $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p[1/p]$ son corps des fractions, qui est le corps des nombres p-adiques. L'anneau $\mathbb{Z}_p$ est local d'idéal maximal engendré par p, c'est un anneau de valuation discrète.

Remarque 2.9. — Si n est entier quelconque on peut définir de la même manière $\mathbb{Z}_n$. Vu que $\mathbb{Z}_{nm} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ par le théorème chinois si n et m sont premiers entre eux, cela n'apporte rien de neuf par rapport aux nombres p-adiques.

Exercice 2.10. — Montrer les points suivants. On retrouvera des cas particuliers de nombreuses propriétés plus générales énoncées dans les lemmes qui vont suivre.

i. Montrer que $\mathbb{Z}$ se plonge dans $\mathbb{Z}_p$ et construire un élément de $\mathbb{Z}_p - \mathbb{Z}$.

ii. Interpréter $\mathbb{Z}_p$ comme des « séries entières en la variable p à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ » et utiliser cette interprétation pour caractériser $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}_p$.

iii. Montrer que $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

iv. Montrer que $p^n\mathbb{Z}_p$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{Z}_p$. Montrer que les $(p^n\mathbb{Z}_p)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de voisinage de 0 dans $\mathbb{Z}_p$.

v. En déduire que $\mathbb{Z}_p$ n'est pas connexe. Montrer en fait que les composantes connexes de $\mathbb{Z}_p$ sont des points : $\mathbb{Z}_p$ est totalement discontinu.

vi. Prouver que le corps des fractions $\mathbb{Q}_p$ de l'anneau $\mathbb{Z}_p$ est bien $\mathbb{Z}_p[1/p]$.

vii. Construire la valuation $v : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{N} \cup \infty$ telle que $v(p) = 1$, $v(1) = 0$, $v(0) = \infty$, $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$ et $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$ avec égalité si $v(x) \neq v(y)$ (inégalité non archimédienne). Étendre cette valuation en $v : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z} \cup \infty$.

viii. Montrer que v est continue lorsqu'on munit son but $\mathbb{Z} \cup \infty$ de la topologie discrète.

ix. En déduire que $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ est une norme qui définit la topologie de $\mathbb{Q}_p$, et cette norme vérifie une inégalité plus forte que l'inégalité triangulaire.

x. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ est complet pour cette norme et coïncide avec la complétion de $\mathbb{Q}$ pour $|\cdot|_p$. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est l'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$. Montrer que $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ est la boule unité fermé, et que cette boule est stable par l'addition et la multiplication. Il s'agit de l'autre construction des nombres p-adiques, qui évite de parler de limite projective.

Exercice 2.11. — Montrer les points suivants.

i. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ est un groupe topologique compact. Montrer qu'il est ouvert dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$.

ii. Montrer que c'est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ [indication : introduire l'action naturelle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathbb{Q}_p^n$ et montrer qu'un sous-groupe compact $K \supset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ stabilise un réseau $L \subset \mathbb{Q}_p^n$, c'est à dire un sous-$\mathbb{Z}_p$-module L isomorphe à $\mathbb{Z}_p^n$].

Exemple 2.12. — Soit K un corps et L_n une extension finie galoisienne de K pour tout $n \in \mathbb{N}$ telle que $L_n \subset L_{n+1}$. Notons $L_\infty = \cup_n L_n$. Alors $\varprojlim_n \mathrm{Gal}(L_n/K)$ est un groupe pro-fini qu'on peut noter $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$. De même le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est un groupe pro-fini appelé groupe de Galois absolu. Son étude est au coeur de la théorie des nombres actuelle. Remarquons qu'on l'a obtenu comme limite projective d'un système ordonné par un ensemble plus compliqué que $\mathbb{N}$ (à savoir le treillis de toutes les extensions galoisiennes de $\mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre provenant des inclusions).

Retournons aux généralités sur les groupes topologiques.

Lemme 2.13. — *Un sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est fermé.*

Démonstration. — Soit H ouvert dans G. Pour tout $g \in G$, le sous-ensemble $g \cdot H$ est ouvert. Donc $G - H = \bigcup_{g \notin H} g \cdot H$ est ouvert. □

Exercice 2.14. — Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Montrer que son adhérence $\bar{H}$ dans G est un sous-groupe.

Soit G un groupe topologique et $H \subset G$ un sous-groupe. On munit l'ensemble G/H de la topologie dont les ouverts sont les images d'ouverts de G par la projection $\pi : G \to G/H$. On force donc π à être ouverte.

Rappelons qu'un espace topologique X est séparé (ou Hausdorff) si pour tous $x \neq y \in X$ il existe des ouverts disjoints U et V tels que $x \in U$ et $y \in V$. Les singletons d'un espace séparé sont fermés, ce qui peut être faux pour des espaces non séparés. Un espace X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ est fermée dans $X \times X$.

Exemple 2.15. — Tout espace métrique est séparé : on peut choisir pour les U et V de la définition des boules ouverts centrées en x et y et de rayon assez petit. En particulier $\mathbb{Q}_p$ est séparé, de même que les variétés réelles. Tout ensemble X muni de la topologie grossière (les seuls ouverts sont $\emptyset$ et X) n'est pas séparé.

Remarque 2.16. — La continuité d'une application $f : X \to Y$ implique sa continuité séquentielle, c'est à dire $f(x_n) \to f(x)$ dès que $x_n \to x$, mais la réciproque est fausse dans le cas non séparé. De même dans le cas non séparé, la limite d'une suite convergente n'est pas unique (si X a la topologie grossière, toute suite converge vers tout élément de X). Dans le cas d'espaces non séparés, il faut donc utiliser utiliser systématiquement ouverts et fermés et oublier les définitions séquentielles.

Remarque 2.17. — Par définition, un espace compact est un espace topologique *séparé* qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. En général si X est non séparé et $Y \subset X$ est compact (donc en particulier séparé pour la topologie induite) il n'est pas vrai que Y est fermé dans X. Contre-exemple : prendre $x \in X$ un point non fermé et $Y = \{x\}$.

De même si X est compact et $f : X \to Y$ est continue, il n'est pas vrai que $f(X)$ est compact car l'image par une application continue d'un espace séparé n'est pas séparé. Voir le lemme 2.20.

Remarque 2.18. — La géométrie algébrique fournit des exemples naturels d'espaces non séparés. Par exemple $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est par définition l'ensemble des idéaux premiers de $\mathbb{Z}$ munis de la topologie de Zariski, où les ouverts sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z}[1/f]$ avec $f \in \mathbb{Z}$. L'espace $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est en bijection avec l'ensemble des nombres premiers union l'idéal nul. Les idéaux $p\mathbb{Z}$ avec p premier définissent des points fermés de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ mais l'idéal nul définit un point ni ouvert ni fermé qu'on appelle « point générique ». Son adhérence est tout $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$! En fait ce point générique est égal à l'intersection de tous les ouverts de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Le même exemple se produit avec $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t])$: ses points fermés correspondent aux idéaux maximaux, qui sont de la forme $(t-a)$ avec $a \in \mathbb{C}$ mais il faut rajouter un point non fermé correspondant à l'idéal nul. Son adhérence est toute la droite complexe. Considérer des espaces topologiques tellement exotiques a été une idée clé de Grothendieck.

Exercice 2.19. — Donner des exemples de groupes topologiques non séparés.

Lemme 2.20. — *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

i. *H est compact si et seulement si π est fermée.*

ii. *H est fermé si et seulement si G/H est séparé.*

iii. *H est ouvert si et seulement si G/H est discret. Si G est compact alors H est ouvert si et seulement si G/H est fini.*

iv. *Si G est localement compact et H fermé, H et G/H sont localement compacts.*

v. *Si G est séparé et H localement compact alors H est fermé.*

vi. *Si H est distingué, G/H est un groupe topologique.*

Démonstration. — Le premier point résulte du fait que si $S \subset G$ est fermé et $T \subset G$ est compact alors $S \cdot T \subset G$ est fermé.

Pour le second point, supposons d'abord G/H séparé. Alors l'origine H est fermée dans G/H donc par définition de la topologie de G/H, on a H fermé dans G. Inversement supposons H fermé. Il faut alors montrer que la diagonale de $G/H \times G/H$ est fermée, donc que $\{(x,y) \in G \times G \text{ tq } x \cdot y^{-1} \in H\}$ est fermé dans $G \times G$. Mais c'est l'image réciproque de H par l'application continue $G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto x \cdot y^{-1}$.

Pour le troisième point, si G/H est discret son origine H est ouverte donc H est ouvert dans G. Inversement si H est ouvert dans G alors les points de G/H sont ouverts donc la topologie est discrète.

Le quatrième point résulte du fait que l'image d'un compact par l'application continue π est compact dans le cas séparé, que π est ouverte et du fait général qu'un sous-espace fermé dans un localement compact reste localement compact.

Pour le cinquième point, soit $U \subset H$ un compact qui contient un voisinage ouvert de 1 dans H ; il existe puisque H est localement compact. Comme H est séparé et U compact, U est fermé dans H. Par définition de la topologie de H comme restriction de celle de G, il existe $V \subset G$ fermé tel que $U = V \cap H$. Soit $W \subset G$ ouvert tel que $W \cdot W \subset V$; il existe puisque la multiplication est continue. On va maintenant montrer que $H = \bar{H}$. Soit $x \in \bar{H}$. Alors $W \cdot x^{-1} \cap H \neq \emptyset$. Soit $y \in W \cdot x^{-1} \cap H$ et W' un voisinage ouvert de yx dans G. Alors $y^{-1}W'$ et xW sont deux voisinages ouverts de x dans G et $x \in \bar{H}$ donc $y^{-1}W' \cap xW \cap H \neq \emptyset$. Soit z dans cette intersection. Alors $yz \in W \cdot W \subset V$, $yz \in H$ et $yz \in W'$. Donc $yz \in W' \cap V \cap H = W' \cap U$. Donc $W' \cap U \neq \emptyset$ pour tout voisinage W' de yx dans G et $yx \in \bar{U}$. Mais U est fermé car compact dans un espace séparé, donc $yx \in U \subset H$ donc $x = y^{-1}yx \in H$. $\square$

Remarque 2.21. — Rappelons qu'un espace topologique X est localement compact pour tout $x \in X$ il existe un compact $U \subset X$ contenant un voisinage ouvert de x. Nous verrons plus loin que la classe des groupes topologiques séparés localement compacts est fondamentale : c'est sur cette dernière qu'on peut définir les *mesures de Haar*.

Exemple 2.22. — Le groupe topologique $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ est localement compact puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ est compact ouvert.

Définition 2.23. — La composante neutre d'un groupe topologique G est la composante connexe de l'identité de G. On la note usuellement G^0.

Lemme 2.24. — *G^0 est un sous-groupe distingué fermé. Le groupe des composantes connexes $\pi_0(G) = G/G^0$ est discret si et seulement si G^0 est ouvert.*

Remarque 2.25. — On a vu dans l'exercice 2.10 que pour $G = \mathbb{Z}_p$ le groupe G^0 est réduit à l'origine. On verra que c'est également le cas pour $G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est plus généralement tout groupe pro-fini. Le sous-groupe G^0 n'est pas ouvert en général car la topologie n'est pas discrète. En fait les composantes connexes d'un espace topologique X sont les sous-espaces *fermés* et connexes de X maximaux pour ces propriétés. Ces composantes connexes ne sont ouvertes que lorsqu'il y en a un nombre fini.

Définition 2.26. — Un morphisme de groupes topologiques $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes continu. Un isomorphisme de groupes topologiques est un isomorphisme de groupes et un homéomorphisme.

Lemme 2.27. — *Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes topologiques et soit H son noyau. Alors H est fermé. De plus f est un isomorphisme de groupes topologiques entre $f(G)$ et G/H si et seulement si $f : G \to f(G)$ est ouverte.*

Remarque 2.28. — Ainsi la catégorie des groupes topologiques munie des morphismes de groupes continus n'est pas abélienne car images et conoyaux ne sont pas toujours isomorphes.

Rappelons qu'un espace topologique X est dit *totalement discontinu* si ses composantes connexes sont les points. En particulier les points de X sont tous fermés.

Exercice 2.29. — Montrer qu'un groupe topologique G dont tous les points sont fermés est séparé. En particulier tout groupe totalement discontinu est séparé. Prendre garde au fait que certains auteurs rajoutent aux hypothèses des groupes topologiques que les points soient fermés (on dit que le groupe est T_1).

La proposition suivante donne une caractérisation des groupes pro-finis. On peut la prouver en exercice.

Proposition 2.30. — *Soit G un groupe topologique. Sont équivalents*

i. *G est limite projective de groupes finis (la limite n'étant pas forcément indexée par $\mathbb{N}$).*

ii. *G est compact séparé et les sous-groupes ouverts distingués forment une base de voisinage de l'identité.*

iii. *G est compact totalement discontinu.*

Dans ce cas on a $G = \varprojlim_H G/H$ où H parcourt l'ensemble ordonné par inclusion des sous-groupes ouverts distingués de G, qui sont d'indice fini.

2.31. Groupes de matrices

Définition 2.32. — Un groupe de Lie est une variété différentiable C^1 de dimension finie munie d'une loi de groupe telle que la multiplication et l'inversion sont différentiables C^1.

Remarque 2.33. — Les groupes de Lie sont des groupes topologiques séparés, localement compacts.

***Théorème 2.34* (Cartan, Van Neumann).** — *Tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie admet la structure de sous-variété différentiable, donc est un groupe de Lie.*

Exercice 2.35. — Soit $f : G \to H$ un morphisme continu de groupes de Lie. Montrer qu'il est différentiable.

Exercice 2.36. — Soit G un groupe de Lie et $H \subset G$ un sous-groupe fermé. Montrer que G/H est une variété différentiable, et un groupe de Lie si H est distingué.

Remarque 2.37. — Soit G une variété topologique (localement isomorphe à $\mathbb{R}^n$ avec des changements de cartes qui sont des homéomorphismes) muni d'une loi de groupe et d'une inversion topologique. Alors G est un groupe de Lie, est C^∞ et est même analytique réelle. Il s'agit du cinquième problème de Hilbert résolu en 1952 par Gleason, Montgomery et Zippin. Voir aussi la remarque 5.38.

Définition 2.38. — Un groupe de Lie linéaire est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Le théorème 2.34 implique qu'un groupe de Lie linéaire est aussi un groupe de Lie. Il existe par contre des groupes de Lie non linéaires : par exemple le revêtement universel de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (le π_1 est $\mathbb{Z}/2$), ou le groupe métaplectique qui est un revêtement à deux feuillets du groupe $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ défini plus bas (le π_1 est $\mathbb{Z}$).

Remarque 2.39. — On verra dans le théorème 4.25 que tout groupe de Lie compact connexe est linéaire. En fait l'hypothèse de différentiabilité n'est même pas nécessaire : tout groupe topologique compact connexe qui est une variété topologique réelle de dimension finie se plonge dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Remarque 2.40. — Tout groupe fini est un groupe de Lie linéaire car il admet une représentation fidèle de dimension finie, par exemple la représentation régulière sur $\mathbb{C}[G]$.

Exercice 2.41. — Montrer que $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ sont des groupes de Lie linéaires.

Exemple 2.42. — Munissons $\mathbb{C}^n$ du produit hermitien $z_1 \cdot \bar{z}_1 + \cdots + z_n \cdot \bar{z}_n$ et notons $U_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le sous-groupes des matrices qui préservent cette forme unitaire. C'est un groupe de Lie linéaire donc un groupe de Lie réel. Par contre ce n'est pas un groupe de Lie complexe : on a par exemple $U_1 = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tq } |z| = 1\}$ qui n'est même pas de dimension paire. Le problème est que $U_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est défini par des équations faisant intervenir la conjugaison complexe, et ces équations ne sont pas holomorphes mais juste différentiables.

Exercice 2.43. — Vérifier que U_n est connexe compact.

Exemple 2.44. — Munissons $\mathbb{R}^n$ de la forme quadratique $\sum_{i=1}^n x_i^2$ et notons $O_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe orthogonal qui préserve cette forme. Alors O_n est un groupe de Lie linéaire compact. Il n'est pas connexe et $SO_n = O_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est sa composante neutre. On a $\pi_0(O_n) = \mathbb{Z}/2$.

Exemple 2.45. — Soit F un corps. Notons J la matrice de taille $2n \times 2n$ donnée par blocs $n \times n$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

et notons $\mathrm{Sp}_{2n}(F) = \{g \in \mathrm{GL}_{2n} \text{ tq } {}^t g \cdot J \cdot g = J\}$. Lorsque $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ c'est un groupe de Lie linéaire non compact appelé groupe symplectique. On peut vérifier qu'il est inclus dans $\mathrm{SL}_{2n}(F)$. Le groupe $\mathrm{Sp}(2n) = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \cap U_{2n}(\mathbb{C})$ est un groupe de Lie réel compact appelé groupe symplectique compact.

La proposition suivante résume le calcul des groupes de composantes connexes π_0 et des groupes fondamentaux π_1 pour les groupes de Lie classiques.

Proposition 2.46. — *Les groupes* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, SO_n, U_n, SU_n, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ *sont connexes. Les groupes* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *et* O_n *ont deux composantes connexes.*

Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ *et* SU_n *sont simplement connexes. On a* $\pi_1(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) = \pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^0) = \mathbb{Z}/2$, $\pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) = \pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(U(n)) = \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(SO_2) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(SO_n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *si* $n > 2$, $\pi_1(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ *si* $n > 1$.

Chacun des groupes précédents donne naissance à des variantes de la même manière que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donne naissance à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$. On notera par exemple

$$\begin{aligned}
\mathrm{SU}_n &= \mathrm{U}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \\
\mathrm{SO}_n &= \mathrm{O}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\
\mathrm{PO}_n &= \mathrm{O}_n / Z_{O_n} \\
\mathrm{PSO}_n &= \mathrm{SO}_n / Z_{SO_n} \\
\mathrm{PU}_n &= \mathrm{U}_n / Z_{U_n} \\
\mathrm{PSU}_n &= \mathrm{SU}_n / Z_{SU_n} \\
\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R}) &= \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) / Z_{SL_n(\mathbb{R})} \\
\mathrm{PSp}_{2n}(F) &= \mathrm{Sp}_{2n}(F) / Z_{Sp_{2n}(F)}
\end{aligned}$$

où Z_G désigne le centre d'un groupe G. Rappelons par exemple que $Z_{O_n} = \{\pm \mathrm{Id}\}$ et que $Z_{SO_n} = \{\pm \mathrm{Id}\}$ si n est pair et $\{\mathrm{Id}\}$ si n est impair, sauf si $n = 2$ auquel cas $Z_{SO_2} = SO_2$. Les centres Z_{U_n} et Z_{SU_n} sont eux formés des homothéties dans ces deux groupes, de même que pour $Z_{\mathrm{Sp}_{2n}(F)}$. Enfin on a $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ pour tout n, ce qui explique qu'on ne parle jamais de ce groupe, et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ si n est impair.

De la même manière qu'on peut agrandir $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ pour former $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en rajoutant les homothéties, on peut agrandir O_n, U_n et $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ en rajoutant les homothéties. Par exemple en notons $q(x) = \sum_i x_i^2$ la forme quadratique usuelle sur $\mathbb{R}^n$ on définit GO_n comme le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ formé des g qui préservent q à un scalaire près, ie tel qu'il existe $\lambda_g \in \mathbb{G}_m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ tel que $q(g \cdot x) = \lambda_g \cdot q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Le facteur λ_g est alors unique étant donné g et il définit un morphisme $GO_n \to \mathbb{R}^*$.

La morale des notations est claire : quand un nom de groupe commence par G c'est qu'il contient les homothéties, quand il commence par P c'est qu'il est de centre trivial et quand il commence par S c'est qu'il est constitué de matrices de déterminant 1.

2.46.1. Groupes linéaires p-adiques. — On peut également définir des groupes de matrices p-adiques, qui sont d'ailleurs appelés groupes de Lie p-adiques. Par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{Z}_p)$ et $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ (défini comme $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ en remplaçant F par $\mathbb{Z}_p$) sont des groupes topologiques compacts totalement discontinus.

Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Q}_p)$ sont eux des groupes topologiques localement compacts totalement discontinus. On peut également définir des groupes orthogonaux p-adiques mais cela demande un peu plus de travail : il faut classifier les formes quadratiques sur $\mathbb{Q}_p^n$ (theorème de Hasse-Minkowski).

2.47. Mesure de Haar

Commençons par des brefs rappels de la théorie de l'intégration. Soit X un ensemble. Rappelons qu'une tribu (ou σ-algèbre) sur X est un ensemble non vide de parties de X stable par union dénombrable et par passage au complémentaire. Supposons que X est un espace topologique. On peut alors lui associer la tribu borélienne, qui est la plus petite tribu contenant les ouverts de X. Ainsi la tribu borélienne de X contient les ouverts de X, les fermés de X, les intersections dénombrables d'ouverts ou les unions dénombrables de fermés. On note $\mathcal{T}_X$ la tribu borélienne de X et on appelle les éléments de $\mathcal{T}_X$ les sous-ensembles boréliens ou plus simplements les boréliens.

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable (pour la tribu borélienne) si pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X \text{ tq } f(x) < t\}$ est dans la tribu borélienne.

Une mesure sur $\mathcal{T}_X$ est une fonction $\mu : \mathcal{T}_X \to [0, \infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ pour toute famille dénombrable $(E_i)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}_X$ dont les intersections deux à deux sont vides. On appelle la dernière la σ-additivité, où le symbole σ veut dire qu'on se restreint à des familles dénombrables.

Lorsque f est mesurable à valeurs positives et μ est une mesure on peut définir $\int_X f d\mu \in [0, \infty]$. Pour le définir on commence par le cas où $f = \mathbf{1}_S$ est l'indicatrice de $S \in \mathcal{T}_X$ en posant $\int_X f d\mu = \mu(S)$, puis on étend par linéarité cette définition aux fonctions étagées, qui sont sommes d'indicatrices avec des coefficients. On note enfin $\int_X f d\mu = \sup\{\int_X s\, d\mu,\ s \text{ etagee tq } s \leq f\}$.

Lorsque f est mesurable à valeurs réelles, on n'est pas capable de définir $\int_X f d\mu$ en général pour la bonne raison qu'on ne sait pas quel sens donner à $\infty - \infty$. On peut par contre écrire $f = f^+ + f^-$ où f^+ est mesurable à valeurs positives et f^- mesurable à valeurs négatives. On a alors défini juste avant $\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in [0, +\infty]$ et on dit que f est intégrable pour μ (et non pas mesurable, qui est une notion indépendante de μ) si $\int_X |f| < +\infty$. On note $L^1(X, \mu)$ l'espace des fonctions intégrables modulo les fonctions presque nulles. C'est un espace de Banach pour la norme L^1 (qui ne serait pas une norme si on n'avait pas quotienté par les fonctions presque nulles). Lorsque $f \in L^1(X, \mu)$, la quantité $\int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$ a bien un sens et on la note $\int_X f d\mu \in \mathbb{R}$.

Définition 2.48. — Une mesure μ sur $\mathcal{T}_X$ est de Radon si elle vérifie

- **i.** $\mu(C) < +\infty$ pour tout compact $C \in \mathcal{T}_X$.
- **ii.** $\mu(S) = \inf\{\mu(U),\ U \text{ ouvert tq } S \subset U\}$ pour tout $S \in \mathcal{T}_X$.
- **iii.** $\mu(U) = \sup\{\mu(C),\ C \text{ compact tq } C \subset U\}$ pour tout ouvert $U \in \mathcal{T}_X$.

Exemple 2.49. — La mesure de Lebesgue est de Radon sur $\mathbb{R}^n$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ mesurable, la mesure $f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ est de Radon. Toutes les mesures données explicitement par des formules sur des sous-espaces localement fermés de $\mathbb{R}^n$ sont donc de Radon. On peut en fait montrer (théorème de Riesz-Markov-Kakutani) que pour tout espace topologique X séparé localement compact, l'opération $\mu \mapsto (\varphi \mapsto \int_X \varphi d\mu)$ définit une bijection entre les mesures de Radon et les fonctionnelles $\Lambda : \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ positives dans le sens où $\Lambda(\varphi) \geq 0$ pour tout $\varphi \geq 0$ et continues pour la norme sup sur la source.

Supposons maintenant que G est un groupe topologique. Alors G agit par translation à gauche et droite sur lui-même, donc agit aussi sur l'ensemble des parties de G. Puisque l'action de $g \in G$ préserve les ouverts, on voit que G agit toujours par translation à gauche et droite sur $\mathcal{T}_G$. Ainsi pour tout borélien $S \in \mathcal{T}_G$ et tout $g \in G$ on dispose des boréliens gS et Sg dans $\mathcal{T}_G$.

Définition 2.50. — Une mesure μ sur $\mathcal{T}_G$ est invariante à gauche (resp. droite) si $\mu(gS) = \mu(S)$ (resp. $\mu(Sg) = \mu(S)$) pour tout $S \in \mathcal{T}_G$ et $g \in G$.

Remarque 2.51. — On peut donc résumer une grande partie de la théorie de l'intégration de Lebesgue en disant que le groupe topologique $(\mathbb{R}, +)$ muni de sa tribu borélienne admet une unique mesure invariante à gauche et droite telle que $\mu([a, b]) = b - a$.

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 2.52. — *Soit G un groupe topologique séparé localement compact. Il existe une mesure de Radon μ_l invariante à gauche. Elle vérifie $\mu_l(U) > 0$ pour tout ouvert U. Tout autre mesure de Radon invariante à gauche est proportionnelle à μ_l. De même il existe une mesure de Radon μ_r invariante à droite, unique à un scalaire près.*

On appelle de telles mesures des mesures de Haar à gauche ou droite. On notera plus simplement $\int_G f(g) d_l g$ et $\int_G f(g) d_r g$ les intégrales pour les mesures μ_l et μ_r. Gardons en mémoire que ces expressions ne sont définies qu'à un scalaire près.

Remarque 2.53. — Il existe de nombreuses preuves du théorème précédent, dues notamment à Cartan et à Weil. Dans le cas où G est compact (ce qui sera le cas plus loin dans ce cours), une preuve très élégante repose sur le théorème du point fixe de Kakutani que l'on rappelle après cette remarque. On note en effet V l'ensemble des fonctionnelles $\Lambda : \mathcal{C}(G, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continues pour la norme sup sur la source. Cette espace est muni d'une action continue de G en posant $(g \cdot \Lambda)(f) = \Lambda(g \cdot f)$ où $(g \cdot f)(h) = f(gh)$. On note $C \subset V$ l'ensemble des fonctionnelles positives. On a donc vu que les éléments de C s'identifient aux mesures de Radon sur G. Le sous-ensemble C est convexe compact (plus précisément *-faiblement compact) et globalement stable par l'action de G sur V. D'après le théorème de point fixe de Kakutani, il existe $c \in C$ fixe par G. La mesure de Radon correspondant à c est donc de Haar !

***Théorème 2.54* (Point fixe de Kakutani).** — *Soit V un espace vectoriel topologique localement compact séparé, G un groupe topologique compact, et une action linéaire continue* *de G sur V (voir le chapitre suivant pour la définition précise d'une action continue). Supposons donnée une partie C convexe compacte non vide de V globalement stable par l'action de G (ie $g \cdot x \in C$ pour tout $x \in C$ et $g \in G$). Alors il existe un point c dans C fixe par tous les éléments $g \in G$ (donc $g \cdot c = c$ pour tout $g \in G$).*

Exemple 2.55. — Les points suivants sont vérifiés.

i. Lorsque G est discret (par exemple fini) la mesure de comptage est une mesure de Haar à droite et gauche.

ii. Lorsque G est abélien, les mesures de Haar à droite et gauche coïncident.

iii. Lorsque $G = \mathbb{R}^n$ avec l'addition, la mesure de Lebesgue $dx_1 \cdots dx_n$ est une mesure de Haar. De même pour $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

iv. Par définition les mesures de Haar sont finies sur les compacts. Lorsque G est compact on peut donc les normaliser par $\mu(G) = 1$, ce qui les rend canoniques.

v. Lorsque $G = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, la mesure de Haar normalisée vérifie $\int_G f d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta$. On retrouve les normalisations de la théorie de Fourier.

Le lemme suivant permet de montrer concrètement que des mesures sont de Haar en utilisant le théorème de changement de variables et des calculs explicites. Il se combine avec l'exemple 2.49.

Lemme 2.56. — *Une mesure de Radon μ est de Haar à gauche si et seulement si pour toute fonction mesurable f à valeurs positives sur G et pour tout $g \in G$ on a $\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(gx)d\mu(x)$. De même à droite en considérant $f(xg)$.*

Exercice 2.57. — Lorsque $G = \mathbb{R}^*$, montrer que $|x|^{-1}dx$ est une mesure de Haar. La mesure de Lebsegue dx est-elle de Haar ?

Exercice 2.58. — Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \right\} .$$

Montrer que $|x|^{-2}dxdy$ est une mesure de Haar à gauche et $|x|^{-1}dxdy$ est une mesure de Haar à droite. En particulier les concepts de mesures de Haar à droite et gauche ne coïncident pas.

Exercice 2.59. — Montrer que $|\det(X)|^{-n}dX$ est une mesure de Haar à gauche et droite sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det(X)|^{-2n}dX$ est une mesure de Haar à gauche et droite sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Soit G un groupe topologique séparé localement compact et μ_l une mesure de Haar à gauche. Pour tout $x \in G$, la mesure $\mu_{l,x}(S) = \mu_l(Sx)$ reste invariante à gauche. D'après le théorème, il existe donc une constante $\Delta(x) \in \mathbb{R}_+^*$ indépendante du choix de μ_l telle que $\mu_{l,x} = \Delta(x)\mu_l$. La fonction $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^*$ mesure donc l'obstruction à ce que les mesures de Haar à gauche soient de Haar à droite. Elle est appelée *caractère modulaire* de G.

Lemme 2.60. — *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

i. *La fonction $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^*$ est un morphisme continu de groupes.*

ii. *La restriction de Δ à tout sous-groupe compact de G est triviale.*

iii. *La mesure $\Delta^{-1}\mu_l$ est de Haar à droite.*

iv. *Pour toute fonction $f \in L^1(G)$, on a $\int_G f(g^{-1})d_lg = \int_G f(g)\Delta(g^{-1})d_lg$.*

Démonstration. — Il est clair que Δ est un morphisme de groupes. Admettons sa continuité. La seconde propriété provient du fait que $\mathbb{R}_+^*$ n'admet pas de sous-groupe compact non trivial. La troisième propriété est formelle et la quatrième aussi.

Montrons la continuité de Δ. Soit $A \subset G$ un sous-ensemble compact d'intérieur non vide (il existe car G est localement compact). Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'axiome ii de la définition 2.48, il existe un ouvert $U \supset A$ tel que $\mu(A) < \mu(U) < (1+\varepsilon)\cdot\mu(A)$.

Comme A est compact il existe un voisinage ouvert V du neutre e_G tel que $A \cdot V = \{a \cdot v | a \in A,\ v \in V\} \subset U$. En effet pour tout $a \in A$ il existe un voisinage V_a de e_G tel que $a \cdot V_a \subset U$, en utilisant la continuité de $g \mapsto a \cdot g$. On considère ensuite le recouvrement par des ouverts $A = \cup_{a \in A} a \cdot V_a$ et on en extrait un sous-recouvrement fini. On pose alors $V = \cap_{a \in I} V_a$ où $I \subset A$ est le sous-ensemble fini paramétrant le sous-recouvrement.

Pour tout $g \in V$ on a alors $\Delta(g) = \frac{\mu(Ag)}{\mu(A)} \leq \frac{\mu(U)}{\mu(A)} < 1+\varepsilon$. Puis pour tout $h \in V^{-1} = \{v^{-1}\ ,\ v \in V\}$, on a $Ah^{-1} \subset U$ donc $A \subset Uh$ donc

$$\Delta(h) = \frac{\mu(Uh)}{\mu(U)} \geq \frac{\mu(A)}{\mu(U)} \geq \frac{1}{1+\varepsilon} > 1-\varepsilon\,.$$

Donc sur l'ouvert $W = V \cap V^{-1}$ on a $|\Delta - 1| < \varepsilon$ d'où la continuité en e_G puis en tout point de G en utilisant que Δ est un morphisme de groupes. $\square$

Définition 2.61. — Un groupe séparé localement compact G est unimodulaire si les mesures de Haar à gauche sont des mesures de Haar à droites, ce qui équivalent à demander que Δ soit trivial.

Lorsque G est unimodulaire, on parle simplement de mesure de Haar. Pour $f \in L^1(G)$ on notera simplement $\int_G f(g)dg$ pour son intégrale relativement au choix d'une mesure de Haar. Le lemme suivant sera primordial pour étudier les représentations des groupes compacts. Il nous permettra des manipulations algébriques d'intégrales grâce à l'action à gauche et droite de G, généralisant la manipulation de sommes lorsque G est fini.

Lemme 2.62. — *Tout groupe compact est unimodulaire de mesure finie.*

Démonstration. — En effet Δ est trivial sur tous les groupes compacts. Les mesures de Radon sont finies sur les compacts par définition. □

Exemple 2.63. — Les points suivants sont vérifiés.

i. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont unimodulaires.

ii. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sont unimodulaires (plus dur).

iii. Les groupes abéliens sont unimodulaires.

iv. Soit G le groupe de l'exercice 2.58. Il vérifie $\Delta = |x|^{-1}$ avec les notations de l'exemple 2.58.

Exercice 2.64. — Soit p un nombre premier et dt une mesure de Haar sur le groupe additif $\mathbb{Q}_p$, normalisée par $dt(\mathbb{Z}_p) = 1$.

i. Montrer que $dt(p^n \cdot \mathbb{Z}_p) = p^{-n}$ pour tout $n \geq 0$.

ii. Montrer que $dt(x \cdot \mathbb{Z}_p) = |x|_p$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$.

iii. Montrer que $|t|_p^{-1} dt$ est une mesure de Haar sur le groupe multiplicatif $\mathbb{Q}_p^*$. [Indication : soit $c \in \mathbb{Q}_p^*$ et $\phi_c : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$, $x \mapsto cx$. Montrer que pour toute mesure de Haar additive μ sur $\mathbb{Q}_p$, $\mu \circ \phi_c$ est égal à $|c|_p \cdot \mu$.]

Exercice 2.65. — Soit $n = n_1 + n_2$ des entiers. Notons $P \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe formé des matrices triangulaires par blocs de taille respective n_1 et n_2

$$\begin{pmatrix} g_1 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

avec donc $g_1 \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{R})$ et $g_2 \in \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{R})$. On dit que P est un sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'une mesure de Haar à gauche sur P est $|\det(g_2)|^{-n_1} d^H g_1 d^H g_2 dx$ et qu'une mesure à droite est $|\det(g_1)|^{-n_2} d^H g_1 d^H g_2 dx$, où dx est la mesure de Lebesgue et $d^H g_i$ est la mesure de Haar sur GL_{n_i} introduite dans l'exercice 2.59.

Exercice 2.66. — Soit G un groupe séparé localement compact et μ_l une mesure de Haar à gauche. Montrer que si $\mu_l(G) < \infty$ alors G est compact. [Indication : supposer par contraposée G non compact. Soit $C \subset G$ un sous-ensemble compact contenant un voisinage ouvert U de l'identité tel que $g^{-1} \in U \; \forall\, g \in U$ et $gg' \in C \; \forall\, g, g' \in U$. Montrer qu'il existe $(g_j)_{j \in \mathbb{N}} \in G$ tels que $g_i \cdot U \cap g_j \cdot U = \emptyset$ pour tous $i \neq j$. En déduire que $\mu(G) = \infty$.]

CHAPITRE 3

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES TOPOLOGIQUES

3.1. Représentations continues

Soit V un espace vectoriel complexe normé (éventuellement de dimension infinie). Notons $\mathrm{Aut}(V)$ les automorphismes linéaires de V, notons $B(V)$ les applications linéaires bornées (qui sont exactement les applications linéaires continues) et $\mathrm{GL}(V) \subset B(V) \cap \mathrm{Aut}(V)$ les automorphismes bornés d'inverse bornée.

Remarque 3.1.1. — Il résulte du théorème de l'application ouverte que si V est un espace de Banach, on a $\mathrm{GL}(V) = B(V) \cap \mathrm{Aut}(V)$, autrement dit que pour tout endomorphisme u continu et bijectif, u^{-1} est continu.

Soit G un groupe séparé localement compact.

Définition 3.2. — Une représentation continue de G est la donnée d'un espace vectoriel complexe normé V et d'un morphisme $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ de groupes tel que $G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto \pi(g)(v)$ soit continue.

Définition 3.3. — Un morphisme de représentations continues $f : (\pi, V) \to (\pi', V')$ est un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire continu $f : V \to V'$ qui commute à l'action de G.

Remarque 3.4. — On note $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ les endomorphismes de représentations continus de V dans V'. On les appelle parfois « opérateurs d'entrelacement ».

Soit V un espace vectoriel complexe normé et $T \subset V$ un sous-ensemble. On dit que T est un tonneau si T est

i. convexe, ie $tu + (1-t)v \in T$ pour tous $u, v \in T$ et $t \in [0, 1]$,

ii. équilibré, ie $tu \in T$ pour tout $u \in T$ et $t \in \mathbb{C}$ tel que $|t| \leq 1$,

iii. fermé,

iv. absorbant, ie $\forall\, x \in V$, $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, on a $|\lambda| \leq \alpha \Rightarrow \lambda x \in V$.

On dit que V est tonnelé si tout tonneau est un voisinage de 0. Les espaces de Banach (pour lesquels la topologie est définie par une norme, et qui sont complets) sont tonnelés. Le théorème de Banach-Steinhaus s'applique aux espaces tonnelés : il garantit que pour tout sous-ensemble $F \subset B(V)$ tel que pour tout $v \in V$ on ait $\sup\{||T(v)||,\ T \in F\} < +\infty$, on a en fait $\sup\{||T||,\ T \in F\} < +\infty$.

Proposition 3.5. — *Soit V un espace normé tonnelé et $\pi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ un morphisme de groupes. Alors (V, π) est une représentation continue si et seulement si*

i. *Pour tout $v \in V$, l'application $G \to V$, $g \mapsto \pi(g)(v)$ est continue,*

ii. *Pour tout $g \in G$, l'application $V \to V$, $v \mapsto \pi(g)(v)$ est continue.*

Démonstration. — Le sens direct est facile, esquissons la démonstration du sens réciproque. Soit U un voisinage compact de l'identité de G contenant un voisinage ouvert et $F = \{\pi(g), g \in U\}$. Comme la propriété ii est satisfaite on a $F \subset B(V)$. Comme U est compact et la propriété i est satisfaite, on a $\sup\{||\pi(g)(v)||,\ g \in U\} < +\infty$ pour tout $v \in V$. Par le théorème de Banach-Steinhaus on a donc $\sup\{||\pi(g)||,\ g \in U\} < +\infty$ ce qui montre que $G \times V \to V$ est continue. □

Remarque 3.6. — Ainsi on peut passer de la continuité pour une application de source $G \times V$ à la continuité sur les « bandes verticales et horizontales » de la forme $\{g\} \times V$ et $G \times \{v\}$.

Notons V^* le dual continu de V, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires $V \to \mathbb{C}$ continues. On va définir plusieurs topologies sur $B(V)$ qui coïncident lorsque V est de dimension fini, mais diffèrent en général.

Définition 3.7. — La topologie faible sur $B(V)$ est telle qu'une base de voisinages ouverts de zéro est formée par les ensembles de la forme $\{T \in B(V) \text{ tq } |\varphi(T \cdot v)| < \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$, $v \in V$ et $\varphi \in V^*$.

Remarque 3.8. — La forme linéaire $B(V) \to \mathbb{C}$, $T \mapsto \varphi(T \cdot v)$ est appelée « coefficient matriciel » associé à $v \in V$ et à $\varphi \in V^*$. Lorsque $V = \mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^n \mathbb{C} \cdot e_i$ et que $V^* = \oplus_{i=1}^n \mathbb{C} \cdot e_i^*$ où e_i^* est la base duale telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, on retrouve l'application qui à $T \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ associe son coefficient en position (i, j) si $v = e_i$ et $v^* = e_j^*$, d'où le nom. En général, la topologie faible est donc une manière de dire qu'une suite $T_n \to 0$ si tous ses coefficients matriciels tendent vers zéro. Il s'agit si on veut d'une généralisation en dimension infinie de la topologie induite par la norme sup $(a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mapsto \sup_{i,j} |a_{i,j}|$.

Définition 3.9. — La topologie forte sur $B(V)$ est telle qu'une base de voisinages ouverts de zéro est formée par les ensembles de la forme $\{T \in B(V) \text{ tq } ||T(v)|| < \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$ et $v \in V$.

Remarque 3.10. — Avec les notations de la remarque 3.8, on en train de généraliser la topologie induite par la norme « sup des normes des colonnes » sur $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Bien sûr cette norme est équivalente à la norme $\sup_{i,j}|a_{i,j}|$ en dimension finie, mais cela cesse d'être vrai en dimension infinie.

Définition 3.11. — La topologie de la norme d'opérateur sur $B(V)$ est induite par la norme triple. Elle munit $B(V)$ d'une structure d'espace normé.

Remarque 3.12. — La topologie de la norme d'opérateur est plus forte que la topologie forte, qui est plus forte que la topologie faible. En dimension finie les trois coïncident.

Lemme 3.13. — *Soit V un espace vectoriel complexe tonnelé et $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes. Alors la représentation (π, V) est continue si et seulement le morphisme $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ est continu pour la topologie forte sur* $\mathrm{GL}(V)$.

Démonstration. — C'est un corollaire du lemme 3.5 : puisque π est à valeurs dans $\mathrm{GL}(V) \subset B(V)$, on sait déjà que $V \to V$, $v \mapsto \pi(g)(v)$ est continu pour tout $v \in V$. La continuité de π pour la topologie forte sur $\mathrm{GL}(V)$ garantit que $G \to V$, $g \mapsto \pi(g)(v)$ est continu pour tout $v \in V$, d'où la continuité de la représentation. □

Remarque 3.14. — Le groupe $\mathrm{GL}(V)$ muni de la topologie forte n'est pas un groupe topologique : si l'on fixe $v \in V$ et ε et qu'on considère l'ensemble des T tels que $||T(v)|| < \varepsilon$, il n'existe a priori pas de $w \in V$ et $\eta > 0$ tel que $||T^{-1}(w)|| < \eta$ pour tout T dans cet ensemble. Il n'y a donc aucune raison pour que $T^{-1}(v)$ soit petit. Le groupe $\mathrm{GL}(V)$ muni de la topologie de la norme d'opérateur est un groupe topologique puisque la norme triple vérifie $||T_1 \circ T_2|| \leq ||T_1|| \cdot ||T_2||$. Par contre peu de représentations donnent un morphisme continu pour cette topologie sur $\mathrm{GL}(V)$ (voir l'exercice suivant).

Exercice 3.15. — Vérifiez les deux points suivants.

i. Soit $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On munit $V = \mathcal{C}(G)$ de la norme $||f|| = \sup_x|f(x)|$ et on considère l'action par translation de G sur V. Montrer qu'elle n'est pas continue pour la topologie de la norme d'opérateur.

ii. Soit $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $V = L^2(G)$ muni de sa G-action par translation. Montrer que cette action n'est pas continue pour la norme d'opérateur.

On peut définir les notions de sous-représentation, de représentation irréductible et de contragrédiente (ie duale) pour les représentations continues des groupes topologiques. Bien sûr il faut prendre garde à la topologie lorsque V est de dimension infinie.

Définition 3.16. — Soit (π, V) une représentation continue de G. Une sous-représentation est un sous-espace vectorie *fermé* $W \subset V$ stable par G. Dans ce cas V/W est muni d'une représentation quotient de G, qui est continue pour la topologie quotient.

Remarque 3.17. — Il résulte du lemme 2.20.ii appliqué au groupe additif V que l'espace vectoriel topologique V/W est séparé si et seulement si W est fermé. Il reste un espace métrique.

Définition 3.18. — Une représentation continue (π, V) de G est irréductible s'il n'existe pas de sous-représentation $W \subset V$ telle que $W \neq 0, V$.

Remarque 3.19. — Insistons sur le caractère fermé de W dans la définition précédente. Toute représentation V de dimension infinie, même irréductible, va admettre des sous-représentations strictes qui sont denses. Par exemple $G = \mathbb{R}$ agissant par translation sur $V = L^2(\mathbb{R})$ est contient la sous-représentation dense $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

Exercice 3.20. — Soit (π, V) une représentation continue de G et $W \subset V$ un sous-espace stable par G. Montrer que son adhérence $\bar{W}$ dans V est stable par G. En déduire que si V est irréductible alors $W = 0$ ou W est dense.

Soit V un espace vectoriel complexe normé. Notons V^* l'espace des formes linéaires continues sur V que l'on munit de la norme $||\varphi|| = \sup_{v\neq 0}|\varphi(v)|/||v||$.

Définition 3.21. — Soit (π, V) une représentation continue de G. La contragrédiente (ou duale) est (π^*, V^*) où $\pi^*(g)(\varphi) = \varphi \circ \pi(g^{-1})$.

Lemme 3.22. — *Supposons que* $\sup_{g\in G} ||\pi(g)|| < +\infty$. *Alors* (π^*, V^*) *est une représentation continue de* G.

Démonstration. — On se réduit à tester la continuité en $g = 1$ et $\varphi = 0$. On a $||\pi^*(g)(\varphi)|| = \sup_{||v||=1} |\varphi(\pi(g^{-1} \cdot v)| \leq M \cdot ||\varphi||$ où $M = \sup_{g\in G} ||\pi(g)||$. $\square$

Remarque 3.23. — Le lemme précédent a des hypothèses et une conclusion forte : on a en fait montré que (π^*, V^*) est continue pour la norme d'opérateur, ce qui est rare (exercice 3.15). Les hypothèses du lemme ne sont pas souvent vérifiées, même si G est compact : il faut par exemple supposer en outre que (π, V) est continue pour la norme d'opérateur. La morale est qu'en dimension infinie, une notion aussi simple que la duale n'existe pas toujours.

3.24. Représentations unitaires

Supposons que V est un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert muni d'un produit hermitien $(\cdot\ ,\cdot)$. En particulier il est de Banach donc tonnelé et l'on peut appliquer la proposition 3.5. Notons $U(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ le sous-groupe des endomorphismes unitaires, qui vérifient $(u(x), u(y)) = (x, y)$ pour tous $x, y \in V$. On peut remarquer que cette condition implique en fait le caractère borné de u, donc sa continuité.

Définition 3.25. — Une représentation unitaire de G dans $\mathrm{GL}(V)$ est une représentation continue à valeur dans $U(V)$. Les morphismes de représentation unitaires $f : (\pi, V) \to (\pi', V')$ sont les morphismes continus $\mathbb{C}$-linéaires $f : V \to V'$ qui commutent aux actions de G (on ne demande *pas* que f préserve le produit hermitien).

Remarque 3.26. — Si (π, V) et (π', V') sont des représentations unitaires de G et si $f : (\pi, V) \to (\pi', V')$ est un morphisme de représentations, son adjoint $f^* : V' \to V$ est un morphisme de représentations. Rappelons que f^* est caractérisé par $(f(x), y) = (x, f^*(y))$ pour tous $x \in V$, $y \in V'$.

Lemme 3.27. — *Soit $\pi : G \to U(V)$ un morphisme de groupes abstraits. On a équivalence entre les propriétés suivantes.*

i. *π est une représentation continue, donc est une représentation unitaire.*

ii. *$G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto (v, \pi(g) \cdot v)$ est continue $\forall v \in V$.*

iii. *π est continue pour la topologie faible, ie $G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto (v, \pi(g) \cdot w)$ est continue $\forall v, w \in V$.*

iv. *π est continue pour la topologie forte, ie $G \to V$, $g \mapsto \pi(g)(v)$ est continue $\forall v \in V$.*

On peut de plus se restreindre à tester la continuité en le neutre de G.

Démonstration. — Les implications $i \Rightarrow iv \Rightarrow iii \Rightarrow ii$ sont vraies pour tout $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$. L'implication $iv \Rightarrow i$ provient du lemme 3.13. L'implication $ii \Rightarrow iv$ provient de Cauchy-Schwartz. □

Exercice 3.28. — Montrer que $\mathbb{R}$ agissant par translation sur sur $L^2(\mathbb{R})$ est une représentation unitaire. De même pour $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ agissant sur $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Exemple 3.29. — Soit G un groupe fini et $\mathbb{C}[G]$ son algèbre de groupe de base les symboles e_g, $g \in G$. On la munit du produit hermitien $\frac{1}{\mathrm{Card(G)}} \sum_{g \in G} a_g \bar{b}_g$. Les deux représentations de G sur $\mathbb{C}[G]$ par action à gauche et droite sont unitaires.

Lemme 3.30. — *Soit G un groupe topologique.*

i. *Soit (π, V) une représentation unitaire et $W \subset V$ un sous-espace fermé. Alors W est stable par G si et seulement si $W^\perp$ est stable par G.*

ii. *Soient (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des représentations unitaires. Alors $(\pi_1 \oplus \pi_2, V_2 \oplus V_2)$ est unitaire pour le produit hermitien $(v_1 \oplus v_2, w_1 \oplus w_2) = (v_1, w_1) + (v_2, w_2)$. De plus V_1 et V_2 sont des supplémentaires orthogonaux dans $V_1 \oplus V_2$.*

iii. *Soient (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des représentations unitaires. Alors $(\pi_1 \otimes \pi_2, V_2 \otimes V_2)$ est unitaire pour le produit hermitien $(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) = (v_1, w_1) \cdot (v_2, w_2)$.*

iv. *En particulier, si* (π, V) *est unitaire et* $\chi : G \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ *est un caractère unitaire,* $(\pi \otimes \chi, V)$ *est une représentation unitaire.*

On peut de plus faire des sommes directes infinies, dans le sens usuel et dans le sens Hilbertien. Soit I un ensemble d'indices et (π_i, V_i) une représentation unitaire de G pour tout $i \in I$. On définit alors $(\oplus_i \pi_i, \oplus_i V_i)$ où presque toutes les composantes sont nulles, et c'est une représentation de G. De même pour $(\prod_i \pi_i, \prod_i V_i)$ où toutes les composantes peuvent être non nulles. On définit aussi $(\hat{\oplus}_i \pi_i, \hat{\oplus}_i V_i)$ comme le sous-espace de $(\prod_i \pi_i, \prod_i V_i)$ formé des famille $(v_i)_i$ telles que $\sum_i ||v_i||^2 < +\infty$. La représentation $\hat{\oplus}_i \pi_i$ est unitaire. Elle contient $\oplus_i \pi_i$ comme sous-espace stable par G (qui est dense, non fermé, donc qui n'est pas une sous-représentation).

3.31. Lemme de Schur

Le lemme de Schur garantit notamment que les seuls endomorphismes d'une représentation irréductible qui commutent à G sont les scalaires. Il est facile à démontrer en dimension finie, en utilisant la diagonalisation, mais plus difficile en dimension infinie. Avant de le démontrer, rappelons la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints continus sur les espaces de Hilbert.

Théorème 3.32. — *Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur continu (ie borné) auto-adjoint de H. Il existe un espace mesuré (X, μ), une isométrie $i : H \simeq L^2(X, \mu)$ et une fonction bornée $f \in L^\infty(X, \mathbb{C})$ telle que via i, l'opérateur A de H devienne l'opérateur $L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$, $g \mapsto f \cdot g$. Si H est séparable on peut supposer $\mu(X) < +\infty$. Si A est unitaire on peut supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{S}^1$.*

Remarque 3.33. — Il faut bien sûr penser à X comme à une base de vecteurs propres de A, à i comme un changement de base vers une base propre et à f comme à l'application qui à un vecteur propre associe la valeur propre correspondante. Le sel de la théorie en dimension infinie est bien sûr que les valeurs propres et les vecteurs propres peuvent varier continûment.

Rappelons plus précisément que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_H$ n'est pas inversible. Le spectre $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A et on peut vérifier qu'il est compact dans $\mathbb{R}$ lorsque A est auto-adjoint. Dans l'énoncé du théorème précédent on a une application $X \to \mathrm{Sp}(A)$ dont le cardinal des fibres tient compte des multiplicités des sous-espaces propre. On peut également formuler le théorème précédent comme donnant une mesure μ_A sur $\mathrm{Sp}(A)$ (pas à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais dans l'ensembles des projecteurs de H) telle que $A = \int_{\mathrm{Sp}(A)} \lambda d\mu_A(\lambda)$.

Ce n'est que lorsque A est compact (ie limite d'opérateurs de rang fini) que $\mathrm{Sp}(A)$ est discret et qu'on retrouve une théorie de la diagonalisation plus usuelle, ne faisant intervenir que des sommes directes hilbertiennes. On retrouve la philosophie générale déjà esquissée dans l'introduction : le dual (ou le spectre) d'un objet compact est discret.

Théorème 3.34. — *Les points suivants sont vérifiés.*

i. *Soit* (π_1, V_1) *et* (π_2, V_2) *deux représentations unitaires irréductibles de* G. *Si elles ne sont pas isomorphes alors* $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$.

ii. *Soit* (π, V) *une représentation unitaire irréductible de* G. *Alors* $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id}_V$.

Démonstration. — Commençons par prouver le second point. Si un endomorphisme Φ de V commute à l'action de G c'est aussi le cas de son adjoint Φ^*. Comme on peut écrire

$$\Phi \;=\; \frac{\Phi + \Phi^*}{2} + i\frac{\Phi - \Phi^*}{2i}$$

comme somme $\Phi = A + iB$ avec A et B auto-adjoints, on se réduit à supposer Φ auto-adjoint. On peut alors lui appliquer la théorie spectrale contenue dans le théorème précédent. On peut donc supposer que $V = L^2(X, \mu)$ et que Φ est la multiplication par une fonction $f \in L^\infty(X)$. Il s'agit donc de voir que f est presque partout constante, car la multiplication par f sera alors de la forme $\lambda \cdot \mathrm{Id}$.

On définit une mesure $\nu = f_*(\mu)$ sur les sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ par la formule $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$. Soit $C \subset \mathbb{R}$ le support de ν, c'est-à-dire le meilleur compact de $\mathbb{R}$ tel que $\nu(B) = 0$ si $B \cap C = \emptyset$. Si C est le singleton $\{\lambda\}$, on en déduit bien que f est presque partout égale à λ. Sinon notons $a = \min(C)$, $b = \max(C)$, $c = (a + b)/2$. On a $\nu([a, c]) > 0$ et $\nu([c, b]) > 0$ par définition de C. Soit Ψ l'opérateur de $V = L^2(X, \mu)$ qui multiplie par $\mathbf{1}_{f^{-1}([a,c])}$ et $W = \mathrm{Ker}(\Psi)$. Comme $\nu([a, c]) > 0$ et $\nu([c, b]) > 0$ on a $W \neq 0, V$.

Montrons finalement que W est stable par G. Soit $g \in G$. On sait que $\pi(g) \circ \Phi = \Phi \circ \pi(g)$ et on veut en déduire que $\pi(g) \circ \Psi = \Psi \circ \pi(g)$. On rappelle que Φ est l'opérateur de multiplication par f. Soit $M = \sup |f|$. Sur $I = [-M, M]$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui converge vers $\mathbf{1}_{[a,c]}$ en étant uniformément bornée. Donc $P_n(f(x)) \to \mathbf{1}_I(f(x))$ pour tout $x \in X$. Comme on a $P_n(\Phi) \circ \pi(g) = \pi(g) \circ P_n(\Phi)$ pour tout n, un passage à la limite montre que $\mathbf{1}_I(f(x)) \circ \pi(g) = \pi(g) \circ \mathbf{1}_I(f(x))$ donc que $\pi(g) \circ \Psi = \Psi \circ \pi(g)$ et que W est G-stable. Par construction W est fermé $\neq 0, V$ et V est supposée irréductible d'où une contradiction.

Montrons maintenant le premier point. Soit $\Phi : V_1 \to V_2$ non nul qui commute à l'action de G. Alors $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est fermé dans V_1 et stable par G donc trivial. La surjectivité est plus délicate car ce qu'on obtient immédiatement est seulement la densité de $\mathrm{Im}(\Phi)$. Mais $\Phi^* \circ \Phi$ est un endomorphisme de V_1 qui commute à l'action de G donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Phi^* \circ \Phi = \lambda \cdot \mathrm{Id}_{V_1}$. Comme $\lambda(v, v) = (\Phi^* \circ \Phi v, v) = (\Phi v, \Phi v)$ on a $\lambda > 0$. Donc $\lambda^{-1/2}\Phi$ est une isométrie et son image est fermée (car toute isométrie $i : X \to Y$ est injective, et sa réciproque i^{-1} définie sur $\mathrm{Im}(i)$ reste une isométrie, donc i^{-1} est continue ce qui implique $\mathrm{Im}(i) = (i^{-1})^{-1}(X)$ est fermé). Donc finalement $\mathrm{Im}(\Phi) = V_2$. $\square$

Exercice 3.35. — Soit G un groupe topologique et V une représentation unitaire.

i. Supposons G abélien. Montrer que V est irréductible si et seulement si elle est de dimension un.

ii. On ne suppose plus G abélien. Soit Z_G son centre. Montrer qu'il existe un caractère $\omega : Z_G \to \mathbb{C}^*$ tel que Z_G agit sur V via ω. On l'appelle le caractère central.

Exercice 3.36. — Soit G un groupe topologique et (π, V) une représentation unitaire.

i. Soient $V_1, V_2 \subset V$ des sous-représentations telles que $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$. Montrer qu'ils sont orthogonaux.

ii. Soit $(\tau_i, W_i)_{i\in I}$ une famille de représentations irréductibles de G deux à deux non isomorphes. Pour tout $i \in I$ on note V_i la sous-représentation maximale de V isomorphe à une somme de copies de W_i (et on l'appelle composante isotypique de W_i dans V). Montrer que les V_i sont deux à deux orthogonaux.

Remarque 3.37. — Lorsque $G = \mathbb{Z}$, la donnée d'une représentation continue équivaut à celle d'un élément de $\mathrm{GL}(V)$, à savoir l'image de $1 \in \mathbb{Z}$. La représentation est unitaire si et seulement si cet élément est unitaire. Les représentations irréductibles correspondent aux éléments de $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire aux valeurs propres possibles. Avec cette correspondance, la composante isotypique associée à $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est le sous-espace propre correspondant. L'exercice précédent montre donc que les sous-espaces propres d'une matrice unitaire sont en somme directe orthogonale.

Exercice 3.38. — On considère le groupe additif $G = \mathbb{R}$.

i. Montrer que les seules représentations irréductibles continues de $\mathbb{R}$ sont de la forme $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \exp(tx)$ avec $t \in \mathbb{C}$. À quelle condition sont-elles unitaires ?

ii. Montrer que $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas irréductible.

iii. Peut-on décomposer $L^2(\mathbb{R})$ en somme directe hilbertienne de représentations irréductibles ?

iv. Traiter le cas de $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ agissant sur $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Remarque 3.39. — L'exercice précédent montre qu'il ne suffit pas de se restreindre aux représentations unitaires pour avoir une théorie qui ressemble à celle des groupes finis, malgré l'existence de produits hermitiens invariants. Il faut en plus se restreindre aux groupes compacts. En fait lorsque $G = \mathbb{R}$, la représentation régulière $L^2(\mathbb{R})$ se décompose non pas comme une somme directe hilbertienne mais comme une « intégrale de représentation » $L^2(\mathbb{R}) = \int_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{C}\cdot\exp(t\cdot)dt$ avec la subtilité qu'aucune des droites $\mathbb{C}\cdot\exp(t\cdot)$ n'est sous-objet de $L^2(\mathbb{R})$. Ce phénomène est tout à fait analogue à celui expliqué dans la remarque 3.33 où des opérateurs non compacts pouvaient avoir un spectre continu, et s'écrire comme intégrale de projections sur des espaces propres.

3.40. Représentation régulière

Soit G un groupe séparé localement compact et d_rg une mesure de Haar à droite. Considérons $L^2(G, d_rg)$ muni de l'action par translation à droite de G : $(g \cdot f)(x) = f(xg)$ pour tous $g \in G$ et $f \in L^2(G, d_rg)$. C'est un analogue de la représentation régulière lorsque G est fini et, comme on peut s'y attendre, on obtient une représentation unitaire.

Proposition 3.41. — *La représentation $L^2(G, d_rg)$ de G par translation à droite est unitaire. Elle est indépendante du choix de la mesure de Haar à gauche d_rg.*

Démonstration. — Il faut déjà vérifier que l'action est bien définie : en effet $L^2(G, d_rg)$ est le quotient des fonctions mesurables sur G par les fonctions presques nulles. Il faut donc voir que si f est presque nulle et $g \in G$ alors $g \cdot f$ est presque nulle. Il faut donc voir que si $B \subset G$ est mesurable tel que $d_r(B) = 0$ alors $d_r(Bg) = 0$. Mais c'est immédiat puisque d_r est G-invariante à droite.

Il faut ensuite vérifier que l'action tombe dans les opérateurs unitaires de $L^2(G, d_rg)$. Il suffit d'écrire $||g \cdot f||^2 = \int_G |f(xg)|^2 d_rx = \int_G |f(x)|^2 d_rx = ||f||^2$ puisque la mesure de Haar est invariante.

Il faut ensuite, et c'est le plus dur, montrer que l'action est continue. On utilise la caractérisation iv de la proposition 3.27. On commence par montrer que pour $f \in \mathcal{C}_c(G)$, l'application $G \to \mathcal{C}_c(G)$, $g \mapsto (x \mapsto (g \cdot f)(x) = f(xg))$ est continue en 1_G pour la norme L^2 sur le but. On a $||g \cdot f - f||^2 = \int_G |f(xg) - f(x)|^2 d_rx$ et $f(xg) - f(x) \to 0$ lorsque $g \to 1_G$ avec

$$|f(xg) - f(x)|^2 \ \leq \ 4||f||_\infty^2$$

donc par convergence dominée on a bien $g \cdot f \to f$ lorsque $g \to 1_G$.

Traitons maintenant le cas où $f \in L^2(G, d_rg)$ est quelconque. On utilise la densité de $\mathcal{C}_c(G)$ dans $L^2(G)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(G)$ tel que $||f - f_\varepsilon|| < \varepsilon$. On a alors pour tout $g \in G$

$$\begin{aligned} ||g \cdot f - f|| &\leq ||g \cdot f - g \cdot f_\varepsilon|| + ||g \cdot f_\varepsilon - f_\varepsilon|| + ||f - f_\varepsilon|| \\ &\leq 2\varepsilon + ||g \cdot f_\varepsilon - f_\varepsilon||. \end{aligned}$$

Mais d'après l'argument précédent, si g est suffisamment proche de 1_G on a $||g \cdot f_\varepsilon - f_\varepsilon|| < \varepsilon$ d'où le résultat.

Enfin si on remplace d_rg par $\alpha \cdot d_rg$ avec $\alpha > 0$ l'application $L^2(G, d_rg) \to L^2(G, \alpha d_rg)$, $f \mapsto \alpha^{-1/2} f$ est une isométrie qui entrelace les deux actions de G. $\square$

Remarque 3.42. — On a bien sûr un analogue lorsqu'on considère une mesure de Haar à gauche d_lg et qu'on considère l'action à gauche de G sur $L^2(G)$: $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$. Lorsque G est unimodulaire (par exemple, compact) $L^2(G)$ est en fait muni d'une action unitaire de $G \times G$ par la formule : $((g \times h) \cdot f)(x) = f(g^{-1}xh)$. On verra dans le théorème de Peter-Weyl que cette double action est fondamentale.

Exercice 3.43. — Soit G séparé localement compact unimodulaire non trivial et $d_r g$ une mesure de Haar à droite. Montrez que $L^2(G, d_r g)$ muni de son action par translation à droite n'est pas irréductible.

Exercice 3.44. — Soit G séparé localement compact et $d_r g$ une mesure de Haar à droite. Montrez que l'action par translation à droite de G sur $L^p(G, d_r g)$ est une représentation continue pour tout $p \geq 1$. De même à gauche.

Exercice 3.45. — Soit G séparé localement compact. Montrer que la représentation régulière $L^2(G)$ est fidèle, c'est-à-dire que $g \in G$ agit trivialement si et seulement si $g = 1_G$.

Exercice 3.46. — Le but est de montrer que tout groupe compact G contient une base de voisinages de 1_G stable par conjugaison : pour tout voisinage U de 1_G dans G, il existe un ouvert $V \subset U$ tel que $xVx^{-1} \subset V$ pour tout $x \in V$.

- **i**. Soit U un voisinage ouvert de 1_G dans G. Montrer qu'il existe $f_1, \cdots, f_n \in L^2(G)$ de norme 1 et $\varepsilon > 0$ tels que $U \supset \{g \in G \text{ tq } ||g \cdot f_i - f_i|| < \varepsilon \, \forall i\}$ [Indication : utiliser l'exercice précédent et la continuité].
- **ii**. Soit $A_i = \{g \cdot f_i, g \in G\}$. Montrer que $V_i = \{g \in G \text{ tq } ||g \cdot f - f|| < \varepsilon \, \forall f \in A_i\}$ est stable par conjugaison, égal à $V_i = \cap_{x \in G} x U_i x^{-1}$ avec $U_i = \{g \in G \, \text{tq} \, ||g \cdot f_i - f_i|| < \varepsilon\}$.
- **iii**. Conclure en montrant que V_i est ouvert [Indication : utiliser la compacité de A_i].
- **iv**. Montrer que pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ il est faux que tout voisinage contient un voisinage stable par conjugaison.

3.47. Action des fonctions intégrables

Rappelons que lorsque G est fini, on a introduit l'algèbre de groupes $\mathbb{C}[G]$ qui est l'algèbre libre sur les symboles e_g, $g \in G$, munie de la multiplication $e_g \cdot e_h = e_{gh}$. On a tautologiquement une équivalence de catégories entre représentations de G sur des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et modules sur $\mathbb{C}[G]$. Cela permet de ramener certaines questions sur les représentations à des problèmes d'algèbre.

Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[G]$ étant muni de la base $(e_g)_{g \in G}$, il s'identifie canoniquement à son dual $\mathbb{C}$-linéaire. Or ce dual est naturellement $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$, les fonctions sur G vu comme ensemble fini. L'identification $\mathbb{C}[G] \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ envoie alors e_g sur la fonction indicatrice δ_g. La structure d'algèbre sur $\mathbb{C}[G]$ induit alors une structure d'algèbre sur $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ dont on vérifie aisément qu'elle est donnée par la convolution

$$(\varphi * \psi)(g) \;=\; \sum_{h \in G} \varphi(h) \cdot \psi(h^{-1}g)$$

pour $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$. Prendre garde que cette structure d'algèbre sur $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ n'a aucun rapport avec la multiplication des fonctions ($(\varphi \cdot \psi)(g) = \varphi(g)\psi(g)$) qui est toujours commutative, même si G ne l'est pas. Pour récapituler, on obtient une équivalence de catégories entres les $\mathbb{C}$-représentations de G et les modules sous l'algèbre de convolution $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$.

Lorsque G est un groupe topologique, on aimerait de même introduire une algèbre de convolution dont les modules soient associés à des représentations de G. C'est l'objet de ce paragraphe.

Proposition 3.48. — *Soit G un groupe topologique séparé localement compact et $d_l g$ une mesure de Haar à gauche. Soit (π, V) une représentation unitaire de G et $f \in L^1(G)$. Il existe un unique opérateur continu $\pi(f) : V \to V$ tel que*

$$(\pi(f) \cdot v, w) = \int_G f(g) \cdot (\pi(g) \cdot v, w) d_l g$$

pour tous $v, w \in V$. De plus, les propriétés suivantes sont satisfaites.

- ***i.*** *Le morphisme $L^1(G) \to B(V)$, $f \mapsto \pi(f)$ est linéaire continu de norme ≤ 1.*
- ***ii.*** *Si $\Phi \in \mathrm{Hom}_G((\pi, V), (\tau, W)$ est un opérateur d'entrelacement, on a $\Phi \circ \pi(f) = \tau(f) \circ \Phi$ pour tout $f \in L^1(G)$.*
- ***iii.*** *L'adjoint de $\pi(f)$ est $\pi(\hat{f})$ où $\hat{f}(g) = \overline{f(g^{-1})}$.*
- ***iv.*** *Tout sous-représentation $W \subset V$ est stable par $\pi(f)$ pour tout $f \in L^1(G)$.*
- ***v.*** *Pour tout $g \in G$ et $f \in L^1(G)$, on a $\pi(g) \circ \pi(f) = \pi(g \cdot f)$ où $g \cdot f$ désigne l'action par translation à gauche de G sur $L^1(G)$ décrite dans l'exercice 3.44. De même pour les translations à droite si on avait défini $\pi(f)$ grâce à la mesure de Haar à droite $d_r g$.*

Démonstration. — Fixons $f \in L^1(G)$ et $v \in V$. Soit $l_{f,v} : V \to \mathbb{C}$ le morphisme $w \mapsto \int_G f(g) \cdot (\pi(g) \cdot v, w) d_l g$. C'est clairement une forme linéaire qui est continue puisque π est fortement continue. On applique alors le théorème de représentabilité de Riesz qui garantit que $l_{f,v}$ est le produit scalaire contre $\pi(f)(v) \in V$. La vérification de toutes les propriétés annoncées pour $\pi(f)$ est formelle. □

Remarque 3.49. — Avec des notations assez claires on a $\pi(f) = \int_G f(g) \cdot \pi(g) d_l g$, intégrale prenant ses valeurs dans $B(V)$. De même, $\pi(f)(v) = \int_G f(g)\pi(g)(v) d_l g$ comme intégrale à valeurs dans V. L'intégration de Lebesgue marche en effet pour les fonctions à valeurs dans n'importe quel espace de Banach, et cela aurait fourni un autre moyen de définir $\pi(f)$. On voit d'ailleurs qu'on peut s'affranchir de l'hypothèse d'unitarité de (π, V).

Remarque 3.50. — On a donc décrit un foncteur des représentations unitaires de G vers les espaces de Hilbert munis d'une action continue de $L^1(G)$: à (π, V) on associe V muni de l'action $f \mapsto \pi(f)$. Il reste à munir $L^1(G)$ d'une loi d'algèbre $*$ telle que $\pi(f * g) = \pi(f) \circ \pi(g)$. Cette loi sera bien sûr la convolution, par laquelle $L^1(G)$ est bien stable si G est unimodulaire. Rappelons en général que si G est unimodulaire et $f \in L^p(G)$ et $g \in L^q(G)$ alors $f * g$ est bien définie dans $L^r(G)$ d'après l'inégalité de Young , où $1/p + 1/q = 1 + 1/r$. Dans ce cas, $||f * g||_r \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$. Nous renvoyons à l'exercice suivant pour montrer que via π, la convolution correspond bien à la composition.

Remarque 3.51. — L'inégalité de Young devient $||f * \Delta^{1/q-1/r} g||_r \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$ lorsque G est séparé localement compact de caractère modulaire Δ. En conséquence, $L^1(G)$ est toujours stable par convolution dans ce cas car $r = q = 1$!.

Remarque 3.52. — Lorsque G est fini on peut indifféremment poser $(\varphi * \psi)(g) = \sum_{h \in G} \varphi(h) \cdot \psi(h^{-1}g) = \sum_{h \in G} \varphi(gh^{-1}) \cdot \psi(h)$. Dans le cadre topologique, à moins que G ne soit unimodulaire il faudra choisir entre une de ces écritures. On préfère poser $(\varphi * \psi)(g) = \int_G \varphi(h) \cdot \psi(h^{-1}g) d_l g$ si on intègre avec la mesure à gauche, et $(\varphi * \psi)(g) = \int_G \varphi(gh^{-1}) \cdot \psi(h) d_r g$ si on intègre avec la mesure à droite. Avec le premier de ces choix si $g \in G$ agit par translation à gauche sur $L^2(G)$ on a $g \cdot (\varphi * \psi) = (g \cdot \varphi) * \psi$.

Exercice 3.53. — Soit G un groupe topologique séparé localement compact unimodulaire et dg une mesure de Haar. Soit $\varphi, \psi \in L^1(G)$.

i. Définir formellement ce que veut dire que f est une fonction de classe, c'est à dire que $\varphi(x^{-1}yx) = \varphi(y)$ pour tous $x, y \in G$.

ii. Montrer que si φ est une fonction de classe alors pour toute représentation unitaire (π, V), le morphisme $\pi(\varphi) \in B(V)$ est un opérateur d'entrelacement.

iii. Montrer que pour toute représentation unitaire (π, V), si on définit le produit de convolution par $(\varphi * \psi)(g) = \int_G \varphi(h)\psi(h^{-1}g)dh$, on a $\pi(\varphi * \psi) = \pi(\varphi) \circ \pi(\psi)$.

Lorsque G est fini, il est facile d'aller dans l'autre sens et à un $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$-module d'associer une représentation de G : on définit l'action de $g \in G$ comme celle de la fonction indicatrice δ_g. Bien sûr ceci n'est pas directement possible dans le cadre topologique, à moins d'introduire des distributions. De façon élémentaire, on peut raisonner de la manière suivante.

Lemme 3.54. — *Soit G un groupe topologique séparé localement compact et (π, V) une représentation unitaire et $d_l G$ une mesure de Haar à gauche. Soit $g \in G$. Pour tout ouvert U contenant g, considérons l'indicatrice normalisée $\psi_U = \mathbf{1}_U / d_l(U)$. Alors $\lim_{g \in U} \pi(\psi_U) = \pi(g)$ où la limite porte sur tous les ouverts U contenant g, et est une limite pour la topologie forte de $B(V)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $v \in V$, il existe $U' \subset G$ contenant g tel que pour tout $U \subset U'$ on a $||\pi(\psi_U) \cdot v - \pi(g) \cdot v|| < \varepsilon$.*

Démonstration. — On a $||\pi(\psi_U) \cdot v - \pi(g) \cdot v|| \leq \sup_{x \in U} ||\pi(x) \cdot v - \pi(g) \cdot v||$. Par continuité forte, la fonction $x \mapsto ||\pi(x) \cdot v - \pi(g) \cdot v||$ est continue nulle en $x = g$ donc $< \varepsilon$ sur un voisinage U' de g dans G. $\square$

3.55. Coefficient matriciels

Soit G un groupe abstrait et (π, V) une représentation de G dans un espace vectoriel. Notons $V^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ le dual de V (par opposition au dual topologique noté V^* lorsque V est muni d'une topologie).

Définition 3.56. — Le coefficient matriciel associé à $v \in V, \varphi \in V^\vee$ est la fonction $c_{v,\varphi} : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \varphi(\pi(g) \cdot v)$.

La théorème suivant contient un résultat d'indépendance linéaire des coefficients matriciels qui sera très utile.

Théorème 3.57. — *Soit $(\pi_i, V_i)_{i\in I}$ une famille des représentations irréductibles de dimension finie deux à deux non isomorphes et $(\pi, V) = \bigoplus_i (\pi_i, V_i)$ leur somme directe.*

i. *Le sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ engendré par les $\pi(g)$, $g \in G$ est égal à $\oplus_i \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$.*

ii. *Pour tout $i \in I$, soit $(e_{i,j})_j$ une base de V_i et $(\varepsilon_{i,j})_j$ la base duale de $V_i^\vee$. Les fonctions $(c_{e_{i,j},\varepsilon_{k,j}})_{i,j,k}$ sont linéairement indépendantes.*

Démonstration. — On voit que le premier point entraîne le second. En effet, toute relation linéaire entre les $(c_{e_{i,j},\varepsilon_{k,j}})_{i,j,k}$ entraîne une relation linéaire entre les matrices $(\pi_i(g))_i$ mais il n'y a pas de relations non triviales dans $\oplus_i \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$.

Montrons maintenant le premier point. Notons $E = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ et

$$R = \{\varphi \in E^\vee \text{ tq } \varphi(\pi(g)) = 0 \, \forall g \in G\}$$

l'ensemble des relations entres les $\pi(g)$. Soit $S = \{\varphi \in E^\vee \text{ tq } \varphi(v) = 0 \, \forall v \in \oplus_i \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)\}$. Si l'on montre que $S = T$ on aura bien montré le premier point par dualité.

L'action duale de G munie $E^\vee$ d'une structure de G-représentation et S, T de sous-représentations. Montrons que $E^\vee$ est une G-représentation semi-simple (ie somme directe de ses sous-représentations irréductibles) et trouvons sa décomposition en irréductibles. Pour cela notons $E_{i,j} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_j, V_i)$ qu'on munit de l'action au but de G par $g \cdot \Phi = \pi_i(g) \circ \Phi$. On a donc $E = \oplus_{i,j} E_{i,j}$ et $E' = \oplus_{i,j} E'_{i,j}$. La G-représentation $E_{i,j}$ n'est pas irréductible et en fait $E_{i,j} = V_i^{\dim(V_j)}$ donc $E_{i,j}^\vee = (V_i^\vee)^{\dim(V_j)}$. On trouve donc $E^\vee = \sum_i (\oplus_j V_j) \otimes V_i^\vee$ ce qui montre la semi-simplicité et décompose en irréductibles.

Élucidons maintenant la structure de G-représentation de $R \subset E^\vee$. Commençons par remarquer que pour tout i, on a un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(V_i^\vee, E^\vee)$ qui envoie $v \in V$ sur $\alpha_v \in \mathrm{Hom}_G(V_i^\vee, E^\vee)$ tel que $< \alpha_v(\lambda), T >=< \lambda, T(v) >$ pour $\lambda \in V_i^\vee$ et $T \in E$, où λ est étendue en une forme linéaire sur V par prolongement par zéro sur les V_j, $j \neq i$. L'application $v \mapsto \alpha_v$ est bien un isomorphisme car elle est injective, et les dimensions sont les mêmes par le lemme de Schur. Tous les sous-espaces de $E^\vee$ isomorphes à $V_i^\vee$ sont donc de la forme $\mathrm{Im}(\alpha_v)$ pour $v \in V$. Mais $\mathrm{Im}(\alpha_v) \subset R$ équivaut à $< \alpha_v(\lambda), \pi(g) >= 0$

pour tous $g \in G$ et $\lambda \in V_i^\vee$. Comme π est la somme des π_i et $\lambda \in V_i^\vee$, cette condition est équivalente à $< \lambda, \pi_i(g)(v_i) >= 0$ où v_i est la projection de v sur V_i. Donc $\mathrm{Im}(\alpha_v) \subset R$ équivaut à $v_i = 0$.

On voit de même que $\mathrm{Im}(\alpha_v) \subset R$ équivaut aussi à $v_i = 0$. Donc on a bien $R = S$ ce qui termine la démonstration. $\square$

Remarque 3.58. — Dans le cas où G est abélien on retrouve l'énoncé bien connu d'indépendance des caractères, usuel en théorie de Galois.

Remarque 3.59. — Le lecteur attentif remarquera que le théorème précédent et sa démonstration se généralisent aux représentations à valeurs dans un corps algébriquement quelconque (de caractéristique éventuellement positive). En effet on a juste utilisé le lemme de Schur pour les représentations irréductibles de dimension finie, mais il vaut dans cette généralité.

Dans le cas où G est topologique et V est un Hilbert, on a $V \subset V^\vee$ par $v \mapsto (\cdot, v)$ (bien sûr l'image est exactement l'ensemble des formes linéaires continues). On peut donc associer des coefficients matriciels à $v, w \in V$.

Lemme 3.60. — *Soit G un groupe topologique et V un espace de Hilbert. Les coefficients matriciels de G sont continus pour tous $v, w \in V$. Si (π, V) est unitaire, ils sont bornés en $g \in G$.*

Remarque 3.61. — Il est faux en général que les coefficients matriciels soient dans $L^2(G)$. C'est bien sûr vrai si G est compact et ce sera un élément important de la démonstration du théorème de Peter-Weyl. Lorsque G n'est pas compact, on introduit la notion de représentation « série discrète » pour lesquelles les coefficients matriciels sont de carré intégrable.

Démonstration. — La continuité provient du lemme 3.27. Le caractère borné vient de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. $\square$

Exercice 3.62. — Soit G un groupe topologique et (π, V) une représentation unitaire de G. Montrer qu'elle est irréductible si et seulement si $\forall v, w \in V$ non nuls, le coefficient matriciel $G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto (v, \pi(g) \cdot w)$ est non identiquement nul.

CHAPITRE 4

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES COMPACTS

4.1. Unitarisabilité

Lorsque G est un groupe topologique quelconque, nous avons dégagé la notion de représentation continue et celle, plus forte, de représentation unitaire. Lorsque G est compact (ce sera le cas dans ce chapitre) toute représentation continue à valeurs dans un espace de Hilbert est unitarisable. On peut donc trouver un nouveau produit hermitien sur l'espace de HIlbert qui définit la même topologie et qui est stable par G. On obtient ce produit stable en moyennant un produit quelconque grâce à la mesure de Haar.

Théorème 4.2. — *Soit G un groupe compact et (π, V) une représentation continue sur un espace de Hilbert. Alors il existe un produit hermitien sur V définissant la même topologie tel que π soit unitaire pour ce nouveau produit hermitien.*

Démonstration. — Partant du produit hermitien $(\cdot, \cdot)$ donné sur V et de la mesure de Haar dg de masse totale 1, on définit $(x, y)_G = \int_G (gx, gy)dg$, qui est clairement un produit hermitien G-invariant. Il reste à montrer que $(,)$ et $(,)_G$ définissent la même topologie. Soit $v \in V$. On sait que $G \to V$, $g \mapsto \pi(g)(v)$ est continue. Donc $\sup_{g\in G} ||\pi(g)(v)|| < +\infty$. Le théorème de Banach-Steinhaus garantit alors que cette quantité est uniformément bornée sur la boule unité de V, donc que $M = \sup_{g\in G} ||\pi(g)|| < +\infty$. Ainsi

$$||\pi(g)(v)|| \leq M||v||, \quad M^{-1}||v|| = M^{-1}||\pi(g^{-1} \cdot g)(v)|| \leq ||\pi(g)(v)|| .$$

Donc par intégration sur G on trouve $M^{-1}||v|| \leq ||v||_G \leq M||v||$ donc les deux topologies sont bien équivalentes. $\square$

Corollaire 4.3. — *Toute représentation de dimension finie d'un groupe compact est unitarisable.*

Exercice 4.4. — Construire des représentations de dimension finie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ qui ne sont pas unitarisables.

Exercice 4.5. — Montrer que tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de O_n. De même tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de U_n.

Remarque 4.6. — Ainsi O_n mérite le nom de sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et U_n de sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Remarque 4.7. — Soit G un groupe de Lie linéaire connexe. On peut également montrer qu'il existe un sous-groupe compact connexe maximal $K \subset G$, c'est-à-dire un sous-groupe compact connexe K tel que pour tout sous-groupe compact connexe $H \subset G$, il existe $g \in G$ tel que $H \subset gKg^{-1}$. C'est le théorème de Cartan-Iwasawa-Malcev.

Exercice 4.8. — Notons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ qui est carrée de taille $2n$.

i. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \text{ tq } P^{-1}JP = J\}$.

ii. Montrer que la partie réelle (resp. imaginaire) d'une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique (resp. alternée) sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$.

iii. En déduire que U_n est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

4.9. Théorème de Peter-Weyl

Le théorème de Peter-Weyl est le suivant. Il généralise aux groupes compacts des énoncés bien connus pour les représentations des groupes finis. Rappelons que puisque les groupes compacts sont unimodulaires (lemme 2.62), on ne différencie plus les mesures de Haar à droite et gauche dans les notations.

Théorème 4.10. — *Soit G un groupe compact. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

***i**. Les représentations irréductibles unitaires de G sont toutes de dimension finie.*

***ii**. Les représentations unitaires sont somme directe hilbertienne d'irréductibles.*

***iii**. La représentation régulière $L^2(G)$ par action à droite se décompose comme G-représentation*

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus_\pi} \pi^{\dim(\pi)}$$

où ρ parcourt les irréductibles. De même pour $L^2(G)$ par action à gauche.

Remarque 4.11. — D'après le théorème 4.2 et son corollaire, on peut enlever les occurrences d'« unitaire » dans le théorème de Peter-Weyl.

Remarque 4.12. — Les représentations unitaires d'un groupe compact sont donc semi-simples, c'est-à-dire complètement réductibles, c'est à dire somme directe hilbertienne de leurs sous-représentations irréductibles. Il s'agit d'un théorème de « diagonalisation » simultanée de matrices qui ne commutent pas. Prenons le cas $G = SO_3$ qui est engendré par les rotations r_x, r_y et r_z d'axe x, y et z dans $\mathbb{R}^3$ (voir l'exemple 5.44). Ces trois rotations ne commutent pas et SO_3 n'est donc pas abélien. Considérons l'action ρ de SO_3 sur les fonctions sur la sphère $L^2(\mathbb{S}^2)$ comme dans l'introduction. Par manque de commutation, on ne peut pas diagonaliser simultanément $\rho(r_x)$, $\rho(r_y)$ et $\rho(r_z)$. Mais on peut les diagonaliser simultanément par blocs en écrivant $L^2(\mathbb{S}^2)$ comme somme directe hilbertienne d'irréductibles.

Si le groupe engendré par r_x, r_y et r_z n'était pas compact, un phénomène de blocs triangulaires supérieurs apparaîtrait et on pourrait seulement trigonaliser par blocs $\rho(r_x)$, $\rho(r_y)$ et $\rho(r_z)$, ce qui est beaucoup moins utile.

Remarque 4.13. — Il est clair que la représentation triviale intervient dans $L^2(G)$ avec multiplicité un, selon la droite des fonctions constantes qui sont L^2 puisque G est compact.

Remarque 4.14. — On a déjà observé que $L^2(G)$ est muni d'une action de $G \times G$ à gauche pour le premier facteur et droite pour le second facteur. On peut montrer que comme $G \times G$-représentation, on a

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus_\pi} \pi \otimes \pi^*$$

où le premier facteur G agit sur les termes π et le second facteur G sur les termes contragrédients π^*. Cela explique que lorsqu'on se restreint à une seule action de G, des multiplicités égales à $\dim(\pi)$ apparaissent. Rappelons enfin que la contragrédiente π^* existe dans ce cas sans ambiguité car π est de dimension finie.

4.14.1. Démonstration du théorème de Peter-Weyl. — On montre d'abord le point iii. Commençons par plonger toute représentation irréductible unitaire de dimension finie (π, V) dans $L^2(G)$. Soit $v, w \in V$ et considérons le coefficient matriciel $c_{v,w} : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto (\pi(g)(v), w)$. D'après le lemme 3.60, la fonction $c_{v,w}$ est continue donc dans $L^2(G)$ puisque G est compact. Fixons $w \in V$. Alors $V \to L^2(G)$, $v \mapsto c_{v,w}$ est un morphisme de G-représentation. Il est injectif par le lemme de Schur car il est non nul (considérer sa valeur en w). Enfin puisque V est de dimension finie, ce morphisme est d'image fermée dans $L^2(G)$. On a donc plongé (π, V) comme sous-représentation de $L^2(G)$. Faisons maintenant varier w dans V. D'après le théorème 3.57 on obtient un plongement de $\pi^{\dim(\pi)}$ dans $L^2(G)$, d'image l'ensemble des coefficients matriciels de π. Enfin par l'exercice 3.36 on obtient de cette manière manière des sous-espaces orthogonaux de $L^2(G)$ lorsque π parcourt les irréductibles unitaires de dimension finie.

Remarque 4.15. — Lorsque G n'est pas compact (par exemple $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$), on voit que toutes les représentations irréductibles ne se plongent pas dans $L^2(G)$. Ce n'est le cas que de celles dont les coefficients matriciels sont L^2, appelées représentations de carré intégrable ou bien séries discrètes. On peut déjà voir ce phénomène lorsque $G = \mathbb{R}$: les représentations irréductibles unitaires sont alors $x \mapsto \exp(itx)$, $t \in \mathbb{R}$ (exercice 3.38) qui n'est pas une fonction L^2. De même lorsque $G = \mathbb{Z}$, les représentations irréductibles unitaires sont $n \mapsto \exp(itn)$, $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, qui n'est pas une série ℓ^2 sur $\mathbb{Z}$.

On a montré que toute représentation irréductible unitaire de dimension finie (π, V) définissait un sous-espace $M(\pi)$ de $L^2(G)$ isomorphe à $\pi^{\dim(\pi)}$ formé des coefficients matriciels $g \mapsto c_{v,w}$.

Lemme 4.16. — *Soit $E \subset L^2(G)$ une sous-représentation qui est dimension finie. Alors E est formé de fonctions continues.*

Démonstration. — Soit $\varphi \in E$. Notons $\nu(g) = \int_G \psi(x)\varphi(gx)dx$ où $\psi \in L^2(G)$. Comme $\nu(g) = (g^{-1} \cdot \varphi, \bar{\psi})$ où le produit hermitien est celui de $L^2(G)$, la continuité forte montre que ν est continue. On a de plus $\nu = \pi(\psi) \cdot \varphi$ où π désigne l'action à gauche de G sur $L^2(G)$ et l'action de $L^1(G)$ sur $L^2(G)$ qui s'en déduit a été introduite dans le paragraphe 3.47, où on a utilisé que puisque G est compact, toute fonction L^2 est L^1. Enfin par le lemme 3.54 pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\psi \in L^1(G)$ tel que $||\varphi - \nu|| < \varepsilon$. On a donc montré que les fonctions continues sont denses dans E. Comme E est de dimension finie, tout élément de E est bien représentable par des fonctions continues. $\square$

On peut alors montrer que pour toute représentation irréductible unitaire de dimension finie (π, V), la composante π-isotypique de $L^2(G)$ est égale à $M(\pi)$, c'est-à-dire que π n'intervient pas plus dans $L^2(G)$ que via ses coefficients matriciels. En effet soit $E \subset L^2(G)$ une sous-représentation isomorphe à π. Par le lemme 4.16, la forme linéaire $\delta : E \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(1)$ est bien définie. Il existe donc $\psi \in E$ tel que $\delta = (\psi, \cdot)$. Pour tout $\varphi \in E$ et $x \in G$ on a $\varphi(x) = \delta(\pi(x) \cdot \varphi) = (\psi, \pi(x) \cdot \varphi) = f_{\varphi,\psi}(x)$. Donc tout $\varphi \in E$ est un coefficient matriciel donc $E \subset M(\pi)$.

On veut maintenant finir la preuve du point iii du théorème de Peter-Weyl. Il faut donc montrer que

$$\left(\bigoplus_{\pi} M(\pi)\right)^{\perp} = 0$$

où la somme directe porte sur tous les π irréductibles.

Remarque 4.17. — On veut donc montrer que si $f \in L^2(G)$ est orthogonale à tous les $M(\pi)$ elle est nulle. Cela généralise un énoncé d'injectivité en théorie périodique de Fourier (cas où $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) : si f est périodique et $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ alors $f = 0$. La difficulté dans le cas où G est général est qu'on a pas prouvé qu'il existait des représentations irréductibles de dimension finie non triviales. Dans ce cas où seule la triviale serait irréductible de dimension finie, toute fonction non constante serait orthogonale à $M(1)$ sans être pourtant nulle. Il nous faut donc construire des sous-espaces non nuls de dimension finie stables par G dans $L^2(G)$. L'ingrédient clé sera la théorie spectrale des opérateurs compacts : ils admettent toujours des valeurs propres et les sous-espaces propres sont de dimension finie.

Lemme 4.18. — *Soit $\varphi \in L^2(G)$ et (π, V) irréductible unitaire. Alors $\varphi \in M(\pi)^\perp$ implique $\varphi * f = 0$ pour tout $f \in M(\pi)$.*

Démonstration. — Soit $f \in M(\pi)$ et $g \in G$. On a $(\varphi, g \cdot f) = \varphi * \hat{f}$ où $\hat{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$. □

Lemme 4.19. — *Soit $\varphi \in L^2(G)$. Supposons que pour tout (π, V) irréductible unitaire de dimension finie on a $\varphi \in M(\pi)^\perp$. Alors pour tout $E \subset L^2(G)$ stable par G, l'opérateur de convolution $T_\varphi : E \to L^2(G)$, $f \mapsto \varphi * f$ est nul.*

Démonstration. — D'après le lemme 4.18, on a $\varphi * f = 0$ pour tout $f \in M(\pi)$, et cela pour tout π irréductible de dimension finie. Mais E est semi-simple, car il est de dimension finie, donc contient une sous-représentation irréductible et son orthogonal. Par somme directe on en déduit le résultat. □

Pour prouver le point iii de Peter-Weyl, il suffit de raisonner par contraposée et de montrer que pour tout $\varphi \in L^2(G)$ non nulle, il existe $E \subset L^2(G)$ stable par G de dimension finie tel que T_φ ne soit pas identiquement nul sur E. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.20. — *Soit $\varphi \in L^2(G)$ non nulle. Il existe $E \subset L^2(G)$ stable par G de dimension finie tel que $T_\varphi : f \mapsto \varphi * f$ ne soit pas identiquement nul sur E.*

Démonstration. — Notons $\psi = \hat{\varphi} * \varphi$ et $T_\psi : L^2(G) \to L^2(G)$, $f \mapsto \psi * f$. L'opérateur T_ψ est alors auto-adjoint et semi-défini positif car $(T_\psi f, f) = ||T_\varphi f|| \geq 0$. On a par définition $(T_\psi f)(x) = \int_G \psi(xy^{-1}) f(y) dy$ pour tout $f \in L^2(G)$. Donc l'opérateur T_ψ est de Hilbert-Schmidt de noyau $k(x, y) = \psi(xy^{-1}) \in L^2(G \times G)$. La théorie générale montre donc que T_ψ est compact. Il est aussi non nul car $\psi(1) = ||\varphi||^2 \neq 0$ car $\varphi \neq 0$. Mais les opérateurs auto-adjoints compacts non nuls ont un spectre non réduit à zéro et leurs espaces propres sont de dimension finie. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $E = \mathrm{Ker}(T_\psi - \lambda)$ soit non nul de dimension finie. On a bien que E est stable par l'action de G. Bien sûr, T_ψ est non identiquement nul sur E et il en est de même pour T_φ car $\mathrm{Ker}(T_\varphi) \subset \mathrm{Ker}(T_\psi)$. □

Nous avons donc prouvé le point iii du théorème de Peter-Weyl : les coefficients matriciels de représentations irréductibles de dimension finie engendrent un sous-espace dense dans $L^2(G)$. Commençons la preuve du point i.

Lemme 4.21. — *Soit (π, V) une représentation unitaire de G. Il existe une sous-représentation irréductible $F \subset V$ non nulle de dimension finie.*

Démonstration. — Il suffit de prouver qu'il existe $F \subset V$ une sous-représentation non nulle de dimension finie : F sera alors somme directe de ses sous-représentations irréductibles. Soit $E \subset L^2(G)$ une sous-représentation de dimension finie et $v \in V$ non nul. Posons $F = \{\pi(f) \cdot v,\ f \in E\} \subset V$ qui est clairement stable par G de dimension finie. On aura gagné si on montre qu'il existe E et v tel que $F \neq 0$.

D'après le lemme 3.54, il existe $\psi \in L^2(G)$ telle que $\pi(\psi) \cdot v$ est arbitrairement proche de $\pi(1) \cdot v = v \neq 0$. En particulier il existe $\psi \in L^2(G)$ tel que $\pi(\psi) \cdot v \neq 0$. D'après le point iii de Peter-Weyl, déjà prouvé, les coefficients matriciels des représentations irréductibles de dimension finie engendrent un sous-espace dense dans $L^2(G)$. Il existe donc $\pi_1, \cdots, \pi_n$ irréductibles de dimension finie et c_i un coefficient matriciel de π_i pour tout i tel que $\psi' = \sum_i c_i$ soit arbitrairement proche de ψ pour la norme L^2. On a en normalisant la mesure de Haar

$$||\pi(\psi) - \pi(\psi')||_{B(V)} \ \leq\ ||\psi - \psi'||_{L^1(G)} \ \leq\ ||\psi - \psi'||_{L^2(G)}\,.$$

Donc $||\pi(\psi') \cdot v||_V \geq ||\pi(\psi) \cdot v||_V - ||\psi - \psi'||_{L^2(G)} \cdot ||v||_V$. Donc on peut choisir $\psi' = \sum_{i=1}^n c_i$ telle que $\pi(\psi') \cdot v \neq 0$. Il suffit alors de poser $E = \sum_{i=1}^n M(\pi_i)$. $\square$

Le point i du théorème de Peter-Weyl est alors immédiat : toute représentation irréductible unitaire (π, V) de G contient par le lemme 4.21 une sous-représentation de dimension finie, donc V est directement de dimension finie.

Il reste à prouver le point ii. Par contraposée, soit (π, V) une représentation unitaire de G qui n'est pas somme directe d'irréductibles (on dit pas « semi-simple »). Soit $W \subset V$ une sous-représentation semi-simple maximale. Elle existe par le lemme de Zorn. Alors on applique le lemme 4.21 à $W^\perp$ et on voit que $W^\perp$ contient E irréductible. Donc $W \oplus E$ est semi-simple plus grosse que W, contradiction.

Remarque 4.22. — Supposons que G admet une représentation fidèle de dimension finie (ie que G est un groupe de Lie linéaire selon la terminologie du premier chapitre). Alors on peut court-circuiter le lemme 4.20, et donc la théorie des opérateurs compacts, de la manière suivante : pour finir la preuve du point iii du théorème de Peter-Weyl, il fallait montrer que les coefficients matriciels des représentations de dimension finie forment un sous-espace dense A de $L^2(G)$. Mais A est une algèbre formée de fonctions continues : avec des notations claires, $c_{\pi,v,w} \cdot c_{\tau,x,y} = c_{\pi\otimes\tau, v\otimes x, w\otimes y}$. Elle sépare les points, ie $\forall g \neq h \in G$, il existe $a \in A$ tel que $a(g) \neq a(h)$. En effet, il suffit de considérer les coefficients matriciels de la représentation fidèle. Par le théorème de Stone-Weierstrass, on en déduit bien la densité de A dans $\mathcal{C}_c(G)$ pour la norme sup, puis dans $L^2(G)$ pour la norme L^2. On remarque qu'à défaut d'avoir une représentation fidèle, il suffit que pour tout $1 \neq g \in G$ il existe une représentation ρ de dimension finie telle que $\rho(g) \neq 1$.

La subtilité est la suivante : on utilisera justement le théorème de Peter-Weyl dans le paragraphe suivant pour montrer que tout groupe compact connexe de dimension réelle finie est un groupe de Lie linéaire. Et de toute manière, les groupes totalement discontinus infinis comme $\mathbb{Z}_p$ ne se plongent pas dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de manière continue.

4.23. Conséquences de Peter-Weyl

4.23.1. Groupes de Lie compacts. — Soit G un groupe topologique compact muni d'une notion de dimension, comme par exemple un groupe de Lie. Nous allons montrer que c'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour n convenable. Avec la terminologie introduite précédemment, c'est donc un groupe de Lie linéaire.

Lemme 4.24. — *Soit G un groupe topologique compact et $g \in G$ non trivial. Il existe une représentation irréductible de dimension finie π telle que $\pi(g) \neq 1$.*

Démonstration. — D'après le théorème de Peter-Weyl, les coefficients matriciels des $\pi \in \hat{G}$ sont denses dans $L^2(G)$ donc en particulier séparent les points. Pour tout $g \in G$ non trivial il existe donc $\pi \in \hat{G}$, $v, w \in V_\pi$ tel que $c_{\pi,v,w}(g) \neq c_{\pi,v,w}(1)$. En particulier on a $\pi(g) \neq \pi(1)$ ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème 4.25. — *Soit G un groupe topologique compact qui est une variété réelle de dimension finie. Il existe une représentation fidèle de dimension finie $\pi : G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. — Notons $d = \min_{\pi\in\hat{G}} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(\pi)$ où la dimension est celle d'une sous-variété réelle de G. Montrons que $d = 0$.

Supposons par contraposée que $d \geq 1$. Soit $\pi \in \hat{G}$ telle que $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(\pi) = d$. Notons H le noyau de π. Il existe donc $h \in H$ non trivial dans la composante neutre H^0. Soit π_h fournie par le lemme précédent telle que $\pi_h(h) \neq 1$. Alors $\mathrm{Ker}(\pi \oplus \pi_h) = H \cap \mathrm{Ker}(\pi_h)$ est un sous-groupe propre de H. Il est donc de dimension $\leq d$. Le cas d'égalité ne se produit que si les composantes neutres de H et de $\mathrm{Ker}(\pi \oplus \pi_h)$ sont égales. Mais ce n'est pas possible car $h \in H^0$ et $h \notin \mathrm{Ker}(\pi \oplus \pi_h)$. Donc $\mathrm{Ker}(\pi \oplus \pi_h)$ est de dimension $< d$ d'où la contradiction.

On a donc $d = 0$ et il existe $\pi \in \hat{G}$ de noyau égal à un nombre fini d'éléments de G. Pour tout $g \in \mathrm{Ker}(\pi)$ soit π_g une représentation fournie par le lemme précédent, telle que $\pi_g(g) \neq 1$. La représentation $\pi \oplus \bigoplus_{g\in\mathrm{Ker}(\pi)} \pi_g$ est alors fidèle de dimension finie. □

Remarque 4.26. — Il existe par contre des groupes de Lie (non compacts) qui ne sont pas linéaires : par exemple le revêtement universel de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ou le groupe métaplectique, qui est un revêtement à deux feuillets non trivial de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ (pour un autre exemple, voir l'exercice 5.49).

4.27. Théorie des caractères

Soit G un groupe compact et dg la mesure de Haar normalisée. Notons $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles unitaires, qui sont toutes de dimension finies. C'est aussi l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles peut-être non unitaires d'après le théorème 4.2. C'est un ensemble pointé par la représention triviale, mais pas un groupe si G est non abélien. On note $[\pi]$ la classe de π dans $\hat{G}$ (ou des fois, juste π).

Remarque 4.28. — L'ensemble $\hat{G}$ est muni d'une action de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{grp}}(G, \mathbb{C}^*)$ via $(\chi, \pi) \mapsto \chi \otimes \pi$. On peut le munir d'une structure de « loi de groupe multi-valuée » en déclarant que $[\pi] \cdot [\tau] = \coprod_i [\rho_i]$ où les ρ_i parcourent les différents facteurs irréductibles de $\pi \otimes \tau$ avec répétition égale à leur multiplicité.

Définition 4.29. — Soit (π, V) une représentation de dimension finie de G. On définit son caractère $\chi_\pi : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \mathrm{Tr}(\pi(g))$ et la formule fait sens puisque V est de dimension finie. La fonction χ_π est invariante par conjugaison donc se factorise par l'ensemble des classes de conjugaison $G^\sharp = G/\{y \sim xyx^{-1},\ x, y \in G\}$. Elle est continue.

Remarque 4.30. — Contrairement au cas des coefficients matriciels, on ne définit pas le caractère d'une représentation unitaire de dimension infinie. Par exemple la définition devrait forcément donner $\chi_\pi(1) = \dim(V)$ ce qui n'a aucun sens.

Remarque 4.31. — Lorsque G n'est pas compact (par exemple $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$) les représentations irréductibles ne sont pas forcément de dimension finie. Définir le caractère n'a rien d'évident. Cela a été fait par Harish-Chandra et l'on obtient une distribution sur G, mais pas une fonction $G \to \mathbb{C}$.

Théorème 4.32. — *Les points suivants sont vérifiés.*

- ***i.*** *Les caractères des irréductibles $(\chi_\pi)_{\pi \in \hat{G}}$ forment une base orthonormale de $L^2(G^\sharp)$. En particulier si ρ est une représentation de dimension finie et $\pi \in \hat{G}$, la multiplicité de π dans ρ est égale à $\int_G \chi_\pi \bar{\chi}_\rho dg$.*
- ***ii.*** *Une représentation ρ de dimension finie est irréductible si et seulement si $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.*
- ***iii.*** *Pour toute représentation unitaire (ρ, V) de G et tout $\pi \in \hat{G}$, la projection orthogonale de V sur sa composante π-isotypique est donnée par $\dim(\pi) \cdot \int_G \bar{\chi}_\pi(g)\rho(g)dg$.*

Démonstration. — Nous ne la referons pas : c'est essentiellement la même que dans le cas des groupes finis, une fois acquis le théorème de Peter-Weyl. □

Remarque 4.33. — On a bien $(\chi_{\pi_1}, \chi_{\pi_2}) = \int_G \chi_{\pi_1} \bar{\chi}_{\pi_2} dg = \delta_{\pi_1, \pi_2}$ pour $\pi_1, \pi_2 \in \hat{G}$. C'est l'analogue d'une des deux formules d'orthogonalité dans le cas des groupes finis, en tenant compte de la normalisation de dg qui cache un facteur $\mathrm{Card}(G)$. On prendra garde à ce que l'autre formule, à savoir $\sum_{\pi\in\hat{G}} \chi_\pi(x)\bar{\chi}_\pi(y) = \mathrm{Card}(G)\cdot\delta_{x,y}$ n'a pas de sens lorsque G est compact car il s'agit d'une série divergente. De même toutes les propriétés d'intégralité dans $\bar{\mathbb{Z}}$ n'ont pas d'analogue immédiat dans le cas compact.

On peut enfin reformuler la théorie d'une manière qui rappelle le plus la théorie de Fourier. Commençons par exhiber une base hilbertienne de $L^2(G)$ qui généralise la base des $x \mapsto \exp(inx)$ si $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 4.34. — *Pour tout $\pi \in \hat{G}$ d'espace vectoriel sous-jacent V_π, choisissons $(e_{i,\pi})_{1\le i\le \dim(\pi)}$ une base orthonormée de V_π. La famille $(f_{\pi,i,j})_{\pi\in\hat{G},i,j}(g) = \sqrt{\dim(\pi)}\cdot(\pi(g)\cdot e_{\pi,i}, e_{\pi,j})$ forme une base orthonormée de $L^2(G)$.*

Démonstration. — C'est une conséquence évident du théorème de Peter-Weyl et de l'orthogonalité des caractères. □

Sans choisir de base des V_π on a la version suivante de la décomposition de Fourier. Rappelons que la norme de Hilbert-Schmidt d'une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ agissant sur un espace vectoriel hermitien de dimension finie muni d'une base orthornormée $(e_i)_i$ est $||A||^2_{HS} = \mathrm{Tr}(A^*A) = \sum_i ||A\cdot e_i||^2 = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2$.

Théorème 4.35. — *Pour tout $\pi \in \hat{G}$ d'espace vectoriel sous-jacent V_π, notons $C_\pi : L^2(G) \to \mathrm{End}(V_\pi)$, $f \mapsto \int_G f(g)\pi(g^{-1})dg$ le coefficient de Fourier « matriciel » de f selon π. On a a la décomposition de Fourier pour presque tout $x \in G$*

$$f(x) \;=\; \sum_{\pi\in\hat{G}} \dim(\pi)\cdot \mathrm{Tr}(C_\pi(f)\circ\pi(x))\,.$$

On a de plus la formule de Parseval $||f||^2_{L^2} = \sum_{\pi\in\hat{G}} \dim(\pi)\cdot ||C_\pi||^2_{HS}$.

Démonstration. — D'après le théorème de Peter-Weyl, on a $L^2(G) = \hat{\bigoplus}_{\pi\in\hat{G}} M(\pi)$. Ainsi $f \in L^2(G)$ se décompose en $f = \sum_{\pi\in\hat{G}} f_\pi$ où f_π s'obtient par produit hermitien (point iii du théorème 4.32). On trouve après un petit calcul $f_\pi(x) = \dim(\pi)\cdot\mathrm{Tr}(C_\pi(f)\circ\pi(x))$. □

Remarque 4.36. — Rappelons que $L^2(G) \subset L^1(G)$ qui agit sur V_π via $f \mapsto \pi(f)$ d'après les résultats du paragraphe 3.47. Mais par définition on a $\pi(f) = C_\pi$ au changement de variable $g \mapsto g^{-1}$ près. On a vu que $\pi(f * g) = \pi(f)\circ\pi(g)$ dans l'exercice 3.53. Cela se traduit donc par $C_\pi(f*g) = C_\pi(f)\circ C_\pi(g)$. Ainsi $f \mapsto C_\pi(f)$ envoie convolution sur produit de matrices, ou composition d'endomorphismes ! On notera que conformément à la philosophie générale, qui dit que le dual de $\hat{G}$ n'existe pas car $\hat{G}$ n'est pas un groupe, et qu'on ne peut pas itérer deux fois la transformée de Fourier, on ne donne pas de formule pour $C_\pi(f\cdot g)$: il n'y a aucun sens raisonnable à donner à une « convolée » $C_\bullet(f) * C_\bullet(g)$.

Remarque 4.37. — Conformément au théorème 4.32, on a une variante de Fourier pour $L^2(G^\sharp)$ (et non pour $L^2(G)$) qui dit que pour tout $f \in \mathrm{L}^2(G^\sharp)$ et tout $\pi \in \hat{G}$ si on note $c_\pi(f) = (\chi_\pi, f) = \int_G f \cdot \bar{\chi}_\pi$ on a

$$f = \sum_{\pi \in \hat{G}} c_\pi(f) \cdot \chi_\pi$$

avec égalité de Parseval $||f||_{L^2}^2 = \sum_{\pi \in \hat{G}} |c_\pi(f)|^2$. Comme $G = G^\sharp$ lorsque G est abélien, il n'est pas évident de savoir laquelle parmi cette variante et celle proposée dans le théorème 4.35 est la meilleure généralisation de la théorie usuelle pour $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Dans tous les cas, nos généralisations ont deux gros inconvénients : on ne connait pas l'ensemble de sommation $\hat{G}$ explicitement (alors que si $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ c'était $\mathbb{Z}$) et on ne connait pas les charactères χ_π (alors que si $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ c'était des exponentielles complexes). Le but du reste de ce cours est de remédier à ces problèmes lorsque G est un groupe de Lie compact connexe comme SO_n ou SU_n. Nous décrirons $\hat{G}$ dans le théorème 7.54 et les charactères χ_π dans le théorème 7.74. À ce moment seulement, nous pourrons prétendre avoir complètement généralisé la théorie de Fourier discrète au cas non abélien.

4.38. Le cas du groupe spécial unitaire

On rappelle que $U_2 \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est le groupe des g tels que $g^t \bar{g} = \mathrm{Id}_2$ et que $SU_2 = U_2 \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Les groupes U_2 et SU_2 sont compacts. Dans cette partie, on va s'intéresser de manière explicite aux représentations irréductibles de SU_2.

Exercice 4.39. — Soit $G = SU_2$.

i. Montrer que G est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

ii. Montrer que G est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$, la sphère unité de $\mathbb{R}^4$.

iii. En déduire une mesure de Haar sur G.

Exercice 4.40. — Soit $V_m \subset \mathbb{C}[X, Y]$ l'espace des polynômes homogènes de degré m. On fait agir $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur V_m par la formule $(g \cdot P)(X, Y) = P([X, Y] \cdot g)$ où $[X, Y]$ est un vecteur ligne dans le second membre.

i. Ecrire explicitement cette action (π_m, V_m).

ii. Soit $T = \{\mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1}), \lambda \in \mathbb{C}^*\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Décomposer en somme d'irréductibles la restriction à T de (π_m, V_m).

iii. Prouver que (π_m, V_m) est une représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

iv. Vérifier que $V_m = \mathrm{Sym}^m(V_1)$.

Remarque 4.41. — On peut en fait montrer que toutes les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sont égales à un V_m. La première conclusion est que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ a des représentations irréductibles de toute dimension, ce qui n'arrive pas pour les groupes finis. La seconde conclusion est que toutes les représentations irréductibles s'obtiennent à partir d'une représentation fidèle fondamentale, à savoir V_1, par des opérations tensorielles. Il s'agit de la philosophie de la théorie des invariants, qui a vu le jour au 19ème siècle.

Exercice 4.42. — Classifier les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ en tenant compte de l'exercice et de la remarque précédents.

Exercice 4.43. — On veut maintenant montre que (π_m, V_m) reste irréductible comme représentation de $SU_2 \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Notons $e_0, \cdots, e_m$ la base de V_m telle que $e_i = X^i Y^{m-i}$. Soit $W \subset V_m$ stable par SU_2.

i. Montrer qu'il existe un ensemble fini I tel que $W = \oplus_{i \in I} \mathbb{C} \cdot e_i$

ii. Soit $i \in I$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $g_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2$. Montrer que

$$\pi_m(g_\theta)(e_i) = \sum_{j=0}^{m} f_j(\theta) \cdot e_j$$

où les fonctions f_j ne sont pas identiquement nulles.

iii. En déduire que (π_m, V_m) est bien une représentation irréductible de SU_2.

Remarque 4.44. — Nous voyons encore une fois que le dual d'un groupe compact infini est discret infini : les (π_m, V_m) sont paramétrés par $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.45. — Nous allons nous intéresser à la représentation adjointe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Soit $V \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de trace nulle muni de l'action de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison : $\pi(g)(M) = gMg^{-1}$. Notons $T \subset SU_n$ le tore des matrices diagonales.

i. Montrer que la restriction de (π, V) à T se décompose en $V = H \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C} \cdot E_{i,j}$ où H est le sous-espace des matrices diagonales de V et $E_{i,j} \in V$ est la matrice élémentaire usuelle. Vérifier que $H = V^T$ (les invariants) et que les T-représentations sur les $\mathbb{C} \cdot E_{i,j}$ sont deux à deux non isomorphes.

ii. Soit $W \subset V$ un sous-espace non nul stable par SU_n. Montrer qu'on n'a pas $W \subset H$.

iii. Montrer que W contient tous les $E_{i,j}, i \neq j$.

iv. Montrer que $W = V$ [Indication : construire une famille génératrice de H dont des combinaisons linéaires sont SU_n-conjuguées à des combinaisons linéaires des $E_{i,j}, i \neq j$].

v. Montrer que V est une représentation irréductible de SU_n et de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 4.46. — Revenons au groupe $G = SU_2$ et aux représentations V_m décrites dans l'exercice 4.43. On veut trouver explicitement un produit hermitien invariant. On utilise la mesure de Haar décrite dans l'exercice 4.39.

i. Munissons $V_m \subset \mathbb{C}[X, Y]$ de la forme $(P_1, P_2) = P_1(1, 0) \cdot \overline{P_2(1, 0)}$. Est-ce une forme hermitienne ?

ii. La forme $(P_1, P_2)_G = \int_G (g \cdot P_1, g \cdot P_2)\, dg$ est-elle un produit hermitien ?

iii. La base e_i introduite dans l'exercice 4.43 est-elle orthogonale ? Tenter de répondre sans calcul.

iv. Quelle est la norme de e_i ?

Exercice 4.47. — Continuons avec le groupe $G = SU_2$. Notre but est de prouver que les V_m sont exactement les représentations irréductibles de G.

i. Montrer que l'ensemble $G^\sharp$ des classes de conjugaison s'identifie à $[0, \pi]$ via $\theta \mapsto c_\theta = \operatorname{diag}(\exp(i\theta), \exp(-i\theta))$.

ii. En terme de l'isomorphisme $G^\sharp = [0, \pi]$, écrire $(\varphi_1, \varphi_2)_G$.

iii. En terme de l'isomorphisme $G^\sharp = [0, \pi]$, calculer le caractère de V_m.

iv. En déduire que les seules représentations irréductibles de G sont les V_m.

Exercice 4.48. — Posons toujours $G = SU_2$. Prouver dans ce cas la formule de Clebsch-Gordan qui garantit que

$$\pi_n \otimes \pi_m = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \pi_{m+n-2i}$$

pour en tant que G-représentations pour tous $m \geq n \geq 0$.

Remarque 4.49. — Rappelons que c'est parce que le produit tensoriel d'irréductibles n'est plus irréductible lorsque G n'est pas abélien que $\hat{G}$ n'est pas un groupe. L'exercice précédent montre explicitement ce phénomène.

Remarque 4.50. — Si un groupe topologique G_i agit sur une représentation de dimension finie V_i, on fait agit $G_1 \times G_2$ sur $V_1 \otimes V_2$ par $(g_1, g_2) \cdot (v_1 \otimes v_2) = (g_1 \cdot v_1) \otimes (g_2 \otimes v_2)$. Il est alors facile de voir que $V_1 \otimes V_2$ est une représentation irréductible de $G_1 \times G_2$ si V_i est une représentation irréductible de G_i pour $i = 1, 2$. En particulier si $G_1 = G_2 = G$, le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ est irréductible comme représentation de $G \times G$. Plongeons G dans $G \times G$ diagonalement. On obtient donc une action de G sur $V_1 \otimes V_2$. Il n'y a maintenant aucune raison que $V_1 \otimes V_2$ soit une G-représentation irréductible, et c'est à ce phénomène que fait référence la remarque ci-dessus.

Exercice 4.51. — Voyons les liens entre représentations irréductibles de $G = SU_2$ et polynômes de Chebychev.

i. Montrer qu'il existe $P_m \in \mathbb{R}[X]$ de degré m tel que $\chi_m(\theta) = P_m(2\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in [0, m]$ et $m \geq 0$, où $\chi_m(\theta)$ désigne le caractère de (π_m, V_m) évalué en c_θ.

ii. Notons $U_m(X) = P_m(X/2)$. Montrer que les U_m forment une base orthogonale de $L^2([-1,1], d\mu)$ où $d\mu(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx$.

iii. Montrer que $U_m(X) = \sum_{0 \leq j \leq m/2} (-1)^j \cdot C_{m-j}^{m-2j} \cdot (2X)^{m-2j}$.

iv. Montrer que pour tous $m \geq n \geq 0$ on a $U_m \cdot U_n = \sum_{k=0}^{n} U_{m+n-2k}$.

v. En déduire que pour tous $m \geq n \geq 0$ et $k \leq (m+n)/2$ on a

$$\sum_{i+j=k i \leq m/2,\, j \leq n/2} (-1)^{i+j} \cdot C_{m-i}^{m-2i} C_{n-j}^{n-2j} = \sum_{l+t=k l \leq n} (-1)^t \cdot C_{m+n-2k}^{m+n-2l-t}.$$

Remarque 4.52. — Il s'agit d'une philosophie générale : la plupart des fonctions et polynômes spéciaux proviennent de la théorie des représentations de groupes de matrices classiques par caractères ou coefficients matriciels, et les identités entre de telles fonctions proviennent d'égalité de représentations. Par exemple, les polynômes de Hermite sont associés au groupe de Heisenberg, à savoir le groupe des matrices unipotentes dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, et les fonctions de Bessel au groupe des automorphismes affines de $\mathbb{R}^2$, à savoir $\mathrm{SO}_2 \ltimes \mathbb{R}^2$.

CHAPITRE 5

ALGÈBRES DE LIE

5.1. Définition

Les algèbres de Lie sont simplement les espaces tangents en l'origine des groupes de Lie. Elle permettent de linéariser à l'ordre un les groupes de Lie, qui sont eux des objets hautement non linéaires (penser déjà à $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Rappelons qu'un groupe de Lie est une variété différentiable de dimension finie qui est un groupe sur laquelle la multiplication est différentiable.

Définition 5.2. — Soit G un groupe de Lie. Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'espace tangent de G en l'élément neutre $1_G \in G$. On a donc $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^{\dim(G)}$.

Exercice 5.3. — Calculer les algèbres de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, U_n, SU_n, O_n, SO_n et $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. On les notera désormais en lettre gothiques : $\mathfrak{gl}_n$, $\mathfrak{gl}_n \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{u}_n$, ...

Toutes les structures de G qui stabilisent l'origine induiront par dérivation des structures correspondantes sur $\mathfrak{g}$.

Définition 5.4. — L'action adjointe (avec majuscule) Ad de G sur $\mathfrak{g}$ est obtenue par dérivation en 1_G de l'action par conjugaison de G sur lui-même, dans laquelle $g * h = ghg^{-1}$.

L'action adjointe est clairement $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathfrak{g}$. On obtient donc un morphisme $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ de but un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Ainsi l'espace tangent de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ en l'identité est juste $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$.

Définition 5.5. — L'action adjointe (avec minuscule) $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ est la différentielle de $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ en 1_G.

Définition 5.6. — Le crochet de Lie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ envoie (x, y) sur $\mathrm{ad}(x)(y)$.

Exercice 5.7. — Calculer Ad, ad et le crochet de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, U_n, SU_n, O_n, SO_n et $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Exercice 5.8. — Montrer que $\mathfrak{sl}_2$, qui est par définition l'algèbre de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les relations $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$, $[E, F] = H$.

Exercice 5.9. — Considérons l'application commutateur $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$. Quelle sa différentielle en $(1_G, 1_G)$? Est-ce le crochet de Lie ?

Lemme 5.10. — *Le crochet de Lie est antisymétrique, $\mathbb{R}$-bilinéaire et vérifie l'identité de Jacobi* $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *pour tous* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

La démonstration de ce lemme n'est pas évidente, nous renvoyons par exemple à [**D**, 1.5.3]. Elle repose sur le théorème de Schwartz garantissant que les dérivées croisées sont symétriques, soit $\partial_x \partial_y = \partial_y \partial_x$. On peut maintenant axiomatiser les propriétés précédentes et dégager la notion d'algèbre de Lie non nécessairement associée à un groupe (mais voir le théorème 5.55)

Définition 5.11. — Une algèbre de Lie (de dimension finie) est un espace vectoriel réel $\mathfrak{g}$ de dimension finie muni d'un morphisme bilinéaire $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ antisymétrique tel que $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. On notera $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, $X \mapsto [X, \cdot]$.

Exemple 5.12. — Soit A un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension qui est une $\mathbb{R}$-algèbre non commutative. On définit une structure d'algèbre de Lie sur A en posant $[X, Y] = XY - YX$. On vérifie alors que l'identité de Jacobi est équivalente à l'associativité de la multiplication de A. Lorsque $A = M_n(\mathbb{R})$ on trouve l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n$, qui est associée au groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Définition 5.13. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel stable par $[\cdot, \cdot]$.

Remarque 5.14. — On peut montrer (théorème d'Ado) que toute algèbre de Lie est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n$ pour n convenable. C'est le pendant en théorie des algèbre de Lie du théorème 4.25.

Définition 5.15. — Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie.

i. Un morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un morphisme $\mathbb{R}$-linéaire qui commute au crochet, soit $[f(X), f(Y)]_{\mathfrak{g}'} = f([X, Y]_{\mathfrak{g}})$.

ii. Un idéal de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ telle que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

iii. Lorsque $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est un idéal, on dispose de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ munie du crochet $[X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] = [X, Y] + \mathfrak{h}$. La flèche $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbre de Lie.

iv. Une représentation réelle de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n$ pour un certain n.

v. Une représentation complexe de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n \otimes \mathbb{C}$ pour un certain n.

Remarque 5.16. — Une représentation complexe de $\mathfrak{g}$ est donc un morphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}_n \otimes \mathbb{C}$. Cela permet alors de faire agir chaque élément de $\mathfrak{g}$ de manière $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathbb{C}^n$ via l'action canonique de $\mathfrak{gl}_n \otimes \mathbb{C}$. Prenons garde au fait qu'on a *pas* demandé que $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n \otimes \mathbb{C}$ soit $\mathbb{C}$-linéaire : cela n'aurait pas de sens car $\mathfrak{g}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On introduira plus loin la classe des algèbres de Lie complexes, où $\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et le crochet est $\mathbb{C}$-linéaire, et celle des représentations holomorphes, où $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n \otimes \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Remarque 5.17. — On a construit un foncteur « espace tangent en l'identité » qui va de la catégorie des groupes de Lie (munis des morphismes continues, qui sont automatiquement différentiables d'après l'exercice 2.35) vers la catégorie des algèbres de Lie. Il envoie un groupe de Lie G sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et un morphisme de groupes f sur sa différentielle df en l'identité. Il envoie représentations (réelles ou complexes) de dimension finie du groupe de Lie vers représentations (réelles ou complexes) de dimension finie de l'algèbre de Lie.

Remarque 5.18. — Pour tout groupe de Lie G on a $Lie(G) = Lie(G^0)$ où $G^0 \subset G$ est la composante connexe de l'identité. Ainsi le foncteur *Lie* se factorise par la catégorie des groupes de Lie connexes. De même, l'algèbre de Lie d'un groupe fini est triviale.

Exercice 5.19. — Soit $H \subset G$ des groupes de Lie d'algèbres de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. À quelle condition suffisante $\mathfrak{h}$ est-il un idéal de $\mathfrak{g}$?

Exercice 5.20. — Montrer que $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algèbre de Lie.

Exercice 5.21. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et V, V' des représentations réelles de $\mathfrak{g}$. Définir une structure de $\mathfrak{g}$-représentation sur le dual $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ et sur le produit tensoriel $V \otimes_{\mathbb{C}} V'$.

Définition 5.22. — Une algèbre de Lie est abélienne si son crochet est nulle.

Exemple 5.23. — Lorsque $G = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R}^*$ ou $G = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$, on a $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ muni du crochet trivial. En général lorsque G est abélien, $\mathfrak{g}$ l'est aussi et c'est même équivalent lorsque G connexe (la démonstration est analogue à celle de l'exercice 5.19).

Exemple 5.24. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Le noyau de $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie abélienne appelée centre de $\mathfrak{g}$ et notée $Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \text{ tq } [X, \cdot] = 0\}$.

Exercice 5.25. — Montrer que toute algèbre de Lie de centre trivial est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}_n$ pour n convenable.

Remarque 5.26. — Nous verrons plus loin que les algèbre de Lie semi-simples sont de centre trivial, donc sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}_n$ pour n convenable. Il s'agit d'un cas particulier du théorème d'Ado, qui garantit que la même propriété est vraie pour toute algèbre de Lie, et qui est beaucoup plus délicat à montrer.

Exercice 5.27. — Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes de Lie. Montrer les équivalences suivantes.

i. df surjective $\iff$ $f(G) \supset G'^0$.

ii. df injective $\iff$ $\mathrm{Ker}(f)$ discret.

iii. Si G' connexe alors df bijective $\iff$ f est un revêtement.

Remarque 5.28. — Soit G un groupe de Lie connexe et $\tilde{G}$ son revêtement universel relativement à 1_G. On peut alors montrer que $\tilde{G}$ est un groupe de Lie et que $\tilde{G} \to G$ est un morphisme de groupes. D'après le point iii de l'exercice précédent, on a donc $Lie(\tilde{G}) = Lie(G)$. C'est justement en considérant des revêtements universels qu'on fabrique des groupes de Lie non linéaires : même si $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est linéaire, ce n'est a priori pas le cas de $\tilde{G}$. Et pourtant $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ ce qui ne contredit donc pas le théorème d'Ado.

Exercice 5.29. — Calculer l'algèbre de Lie de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ et montrer qu'elle est isomorphe à celle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Cela est-il conforme à la remarque 5.28 ? Le centre de $\mathfrak{sl}_n$ est-il trivial ? Celui de $\mathfrak{pgl}_n$? Celui de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$? Celui de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$? Est-ce logique ?

5.30. Exponentielle

On va s'intéresser dans cette partie aux groupes de Lie linéaires pour lesquels il existe un plongement $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Rappelons qu'un tel plongement existe toujours si G est un groupe de Lie compact d'après le théorème 4.25.

L'avantage à travailler avec des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est qu'on dispose de l'exponentielle matricielle $\exp : \mathfrak{gl}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui réalise un difféomorphisme local entre un voisinage ouvert de $0 \in \mathfrak{gl}_n$ et un voisinage ouvert de $1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 5.31. — Puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ (voir l'exercice 4.8 pour identifier l'image) il est identique de demander que G se plonge dans un groupe linéaire complexe ou réel.

Définition 5.32. — Soit G un groupe de Lie. Un sous-groupe à un paramètre de G est un morphisme de groupes différentiable $\mathbb{R} \to G$.

Ainsi pour tout $X \in \mathfrak{gl}_n$ on obtient un sous-groupe à un paramètre $\lambda_X : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto \exp(t \cdot X)$. Il faut y penser comme un chemin tracé sur la variété $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. La philosophie est alors de reconstituer la géométrie de cette variété grâce à l'ensemble de tels chemins. La première chose à voir est que tous les groupes à un paramètre sont bien donnés par l'exponentielle d'un élément de l'algèbre de Lie.

Lemme 5.33. — *Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe à un paramètre. Notons $X = \lambda'(0) \in \mathfrak{gl}_n$. On a $\lambda(t) = \exp(t \cdot X)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. — Comme λ est un morphisme de groupes on a $\lambda'(t) = \lambda(t)\lambda'(0) = \lambda(t)X$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De même, $\frac{d}{dt}(t \mapsto \exp(t \cdot X)) = \exp(t \cdot X)X$. Ainsi λ et $t \mapsto \exp(t \cdot X)$ vérifient la même équation différentielle $y'(t) = y(t)X$ et vérifient la même condition initiale. Par unicité du problème de Cauchy, ils sont donc égaux. □

Définition 5.34. — Soit G un groupe de Lie. On note $\mathfrak{X}(G)$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G.

Le lemme 5.33 montre immédiatement que $\mathfrak{X}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathfrak{gl}_n$, bijection via laquelle à λ un sous-groupe à un paramètre on associe $\lambda'(0) \in \mathfrak{gl}_n$ et à $X \in \mathfrak{gl}_n$ on associe le sous-groupe à un paramètre $\lambda(t) = \exp(t \cdot X)$. Il reste à expliciter la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n$ sur $\mathfrak{X}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

Lemme 5.35. — *La structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{X}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ est donnée par les formules*

- ***i.*** $(r \cdot \lambda)(t) = \lambda(rt)$ *pour tout* $r \in \mathbb{R}$,
- ***ii.*** $(\lambda + \mu)(t) = \lim_{k\to+\infty} (\lambda(t/k)\mu(t/k))^k$,
- ***iii.*** $[\lambda, \mu](t) = \lim_{k\to+\infty} (\lambda(1/k)\mu(t/k)\lambda(-1/k)\mu(-t/k))^{k^2}$.

Démonstration. — Il suffit de prouver les formules

$$\lim_{k\to+\infty} (\exp(X/k)\exp(Y/k))^k = \exp(X + Y)$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} (\exp(X/k)\exp(Y/k)\exp(-X/k)\exp(-Y/k))^{k^2} = \exp(XY - YX)$$

ce qui résulte d'un développement limité. □

Montrons à présent un cas particulier du théorème de Cartan-Van Neuman et étudions le lien entre algèbre de Lie et exponentielle pour un groupe de Lie linéaire.

Théorème 5.36. — *Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe fermé. Alors c'est un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n \text{ tq } \exp(t \cdot X) \in G \ \forall t \in \mathbb{R}\}$.*

Démonstration. — Notons $L = \{X \in \mathfrak{gl}_n \,\mathrm{tq}\, \exp(t\cdot X) \in G \,\forall t \in \mathbb{R}\}$. D'après les formules de limites précédentes c'est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}_n$. Soit E un supplémentaire de L dans $\mathfrak{gl}_n$. Considérons l'application $F : L \times E \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $(X, Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y)$. Sa différentielle en zéro est l'application somme $L \times E \to \mathfrak{gl}_n$ donc est bijective. Il existe donc des voisinages U et V de zéro dans L et E et un voisinage W de l'identité dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que F réalise un difféomorphisme $F : U \times V \xrightarrow{\sim} W$. Nous allons montrer qu'il existe un voisinage $V' \subset V$ de zéro dans E tel que si on pose $W' = F(U \times V')$, on a $F(U \times 0) = W' \cap G$. Cela montrera bien que $W' \cap G$ est une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ d'espace tangent en l'origine égal à $T_0U = L$. On aura donc démontré le théorème en raisonnant grâce à l'action de G sur lui-même par translation pour pour prouver les mêmes résultats en tout point de G.

Admettons qu'il existe un voisinage $V' \subset V$ tel que $\exp(V') \cap G = \{1\}$. Posons $W' = F(U \times V')$. Pour tout $g \in W' \cap G$ il existe $(X, Y) \in U \times V'$ tels que $g = F(X, Y) = \exp(X)\exp(Y)$. Donc $\exp(Y) = \exp(-X)F(X, Y)$ est dans $\exp(V') \cap G$, donc $F(X, Y) = \exp(X)$ ce qui prouve bien que $F(U \times 0) = W' \cap G$.

Il reste à prouver qu'il existe un voisinage $V' \subset V$ tel que $\exp(V') \cap G = \{1\}$. Par contraposée si ce n'est pas le cas il existe une suite $Y_n \in E - \{0\}$ convergeant vers 0 telle que $\exp(Y_n) \in G$. Quitte à extraire on peut supposer que $Y_n/||Y_n||$ converge vers $Y \in E$. On a donc $Y \neq 0$ car $||Y|| = 1$. Montrons que $Y \in L$ ce qui contredira $L \cap E = 0$. Il suffit de prouver que $\exp(tY) \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notons $[x]$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\exp(t \cdot Y_n/||Y_n||) = \exp(Y_n)^{[t/||Y_n||]} \cdot \exp\left(Y_n \cdot (t/||Y_n||) - [t/||Y_n||]\right) .$$

Comme $x - [x] \leq 1$ et $Y_n \to 0$ on a donc bien

$$\exp(t \cdot Y) = \lim_{n\to+\infty} \exp(t \cdot Y_n/||Y_n||) = \lim_{n\to+\infty} \exp(Y_n)^{[t/||Y_n||]} \in G .$$

□

Remarque 5.37. — Faire un dessin pour illustrer la démonstration précédente. L'idée de la preuve est la suivante : par définition $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ est un sous-espace vectoriel, donc une sous-variété. Puisque exp est différentiable, si l'on montre que exp envoie $\mathfrak{g}$ sur G on aura bien que G est une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 5.38. — Comme $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ est une sous-variété analytique réelle et exp est analytique réelle, on a montré que les groupes de Lie linéaires (supposés seulement C^1) sont analytiques réels donc en particulier C^∞. Cela est vrai pour tous les groupes de Lie (voir la remarque 2.37).

Lemme 5.39. — *Soit G un groupe de Lie et $U \subset G$ un voisinage ouvert connexe de 1_G. Le sous-ensemble engendré (au sens des monoïdes) par U est égal à la composante neutre G^0.*

Démonstration. — Notons par récurrence $U^n = U \cdot U^{n-1} \subset G$ pour tout $n \geq 1$. Alors $V = \cup_{n\geq 0} U^n$ est une union de connexes d'intersection non vide donc est connexe donc $V \subset G^0$.

Notons $W = U \cap U^{-1}$ qui est un voisinage de 1_G dans G stable par inverse. Alors $V \supset \cup_{n\geq 0} W^n$ et $\cup_{n\geq 0} W^n$ est un sous-groupe ouvert de G, donc contient G^0. On en déduit bien $V = G^0$. $\square$

La proposition suivante est maintenant immédiate. Tout son intérêt est qu'elle ne dépend pas du choix d'un plongement de G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, même si ce plongement est utilisé dans la démonstration *via* l'exponentielle matricielle.

Proposition 5.40. — *Soit G un groupe de Lie linéaire. Alors*

i. *On a une bijection $\mathfrak{X}(G) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$, $\lambda \mapsto \lambda'(0)$.*

ii. *La bijection inverse $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G)$, $X \mapsto \lambda_X$ est donnée par la formule $\lambda_X(t) = \exp(t\cdot X)$ où on a choisi n et un plongement $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\exp$ désigne l'exponentielle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

iii. *La structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{X}(G)$ est donnée par les formules du lemme 5.35, où on a choisi n et un plongement $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

iv. *Il existe une application canonique $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$, $X \mapsto \lambda_X(1)$ qui réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur un voisinage de 1_G dans G.*

v. *Si G' est un groupe de Lie linéaire et $f : G \to G'$ est un morphisme, alors $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ s'identifie à $\mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(G')$, $\lambda \mapsto f \circ \lambda$. On a $\exp_{G'} \circ df = f \circ \exp_G$.*

Remarque 5.41. — L'application $\exp_G$ n'est bien sûr pas un morphisme car elle ne vérifie pas $\exp_G(x+y) = \exp_G(x)\cdot\exp_G(y)$ lorsque $[x, y] \neq 0$ (mais il existe en fait diverses plusieurs formules permettant de calculer $\exp_G(x + y)$ en termes de crochets de Lie successifs de x et y). Ainsi l'image de $\exp_G$ n'est pas un sous-groupe de G. Nénmoins cette image engendre (au sens des monoïdes, ce qui est mieux qu'au sens des groupes) la composante neutre G^0 d'après le lemme 5.39.

Remarque 5.42. — Lorsque $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on a $\exp(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} X^n$. Cette formule fait sens dans $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ car on utilise le produit des matrices (X^n...) et on montre que le résultat est finalement dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a donc utilisé que $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ est une algèbre dans laquelle se plonge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Les deux propriétés sont prises en défaut lorsque $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$: $\mathfrak{sl}_n$ n'est pas une algèbre car le produit de matrices de traces nulles n'est pas de trace nulle, et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ne se plonge pas dans $\mathfrak{sl}_n$. C'est pour cela qu'on recourt à un plongement dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour définir l'exponentielle.

Pour les groupes classiques, on trouve des formules simples pour l'exponentielle, car il existe toujours un plongement privilégié dans un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Mais tout plongement définirait une exponentielle et il n'est pas évident que cette exponentielle soit toujours la même : plongeons par exemple $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_{n^2}(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))$ via l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche. Si $\iota : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_{n^2}(\mathbb{R})$ est ce plongement, est-ce clair que $\sum_n \frac{1}{n!} X^n = \sum_n \frac{1}{n!} \iota(X)^n$?

De plus il n'est pas clair que exp défini à la main grâce à un plongement privilégié soit fonctoriel : considérons en effet le morphisme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$. L'exponentielle sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est définie de manière naïve via $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mais celle sur $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ utilise le plongement plus compliqué $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_{n^2}(\mathbb{R})$ décrit dans l'exercice 2.41. L'objet de la théorie, et l'intérêt d'introduire les équations différentielles, a été de vérifier que toutes ces exponentielles sont canoniques et fonctorielles.

Exemple 5.43. — Soit $x \in G$ et $\mathrm{Int}_x : G \to G$, $g \mapsto xgx^{-1}$. On a $\mathrm{Int}_x \circ \exp_G = \exp_G \circ \mathrm{Ad}_x$. De même soit $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. On a $\mathrm{Ad}(\exp_G(X)) = \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}(X))$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Lorsque $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ cette égalité se reformule en $\exp(X) \cdot Y \cdot \exp(-X) = \exp(\mathrm{ad}_X)(Y)$ pour tous $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, et cette identité n'est pas évidente à montrer à la main.

Exemple 5.44. — L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$ de SO_3 consiste en les matrices anti-symétriques réelles de taille 3. Elle admet donc une base formée de

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les relations $[J_x, J_y] = J_z$, $[J_y, J_z] = J_x$ et $[J_z, J_x] = J_y$. On peut alors décrire les sous-groupe à un paramètre correspondant, et l'on retrouve les sous-groupes de rotations privilégiés comme par exemple

$$\exp(t \cdot J_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Comme SO_3 est connexe, le groupe engendré par les matrices de la forme $\exp(tJ_x)$, $\exp(tJ_y)$ et $\exp(tJ_z)$ avec $t \in \mathbb{R}$ est tout SO_3 (mais voir la remarque suivante). On peut donc dire que J_x, J_y et J_z sont des générateurs infinitésimaux de SO_3.

Remarque 5.45. — On verra dans le théorème 7.16 que $\exp_G$ est surjective si G est compact et connexe.

Exercice 5.46. — Montrer que $\exp_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$ est surjective mais pas $\exp_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$.

Exercice 5.47. — Soit $G = SU_2$ et $X = \mathrm{diag}(i\pi, -i\pi) \in \mathfrak{su}_2$. Montrer que $\exp_G$ n'est pas localement injective en X (alors qu'elle est localement injective en 0 par la proposition 5.40).

Exercice 5.48. — Soit G un groupe de Lie connexe. Montre que le noyau de $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est le centre $Z(G)$ de G. De même soit $H \subset G$ un sous-groupe de Lie connexe. Montrer que H est distingué si et seulement si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est un idéal.

Exercice 5.49. — Soit $U \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures strictes et

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{Z} \right\} \subset U\,.$$

Notons $H = U/\Gamma$ qui est un groupe de Lie de dimension trois muni d'un morphisme $\pi : U \to H$. Le but de l'exercice est de montrer que H n'est pas linéaire. Fixons n et un morphisme $\varphi : H \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Notre but est de montrer que φ n'est pas injectif.

i. Vérifier que $\mathrm{Lie}(H)$ est isomorphe à $\mathbb{R} \cdot E_{12} \times \mathbb{R} \cdot E_{23} \times \mathbb{R} \cdot E_{13}$ où les E_{ij} sont les matrices élémentaires.

ii. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $d\varphi(E_{13})$ et $V_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ le sous-espace propre correspondant. Montrer que V_λ est stable par $d\varphi(E_{12})$ et $d\varphi(E_{23})$.

iii. Montrer que $\lambda = 0$ donc que $d\varphi(E_{13}) \in \mathfrak{gl}_n$ est nilpotente.

iv. Montrer que $\exp(d\varphi(E_{13})) = 1$.

v. Conclure.

Remarque 5.50. — Nous avons déjà mentionné qu'il existe d'autres types de groupes de Lie non linéaires, comme le revêtement universel de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ou celui de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, appelé groupe métaplectique (voir la remarque 5.28). Rappelons d'ailleurs que les π_1 de ces groupes sont isomorphes à $\mathbb{Z}/2$, par opposition au π_1 de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ ou de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ qui est trivial.

Bien sûr en vertu du théorème 4.25, les groupes de Lie compacts sont tous linéaires.

Remarque 5.51. — L'existence de groupes de Lie non linéaires ne contredit pas le théorème d'Ado qui dit que toute algèbre de Lie est linéaire (voir exercice 5.25). En effet le foncteur *Lie* n'est pas pleinement fidèle puisqu'il oublie les revêtements.

5.51.1. Exponentielle pour les groupes non linéaires. — Il reste à généraliser la proposition 5.40 aux groupes de Lie quelconques. On ne peut donc plus utiliser l'exponentielle matricielle. Il faut la remplacer par l'utilisation d'équations différentielles et de leurs flots. La difficulté essentielle est en effet de construire l'inverse $\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(G)$, $X \mapsto \lambda_X$ de $\mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{g}$, $\lambda \mapsto \lambda'(0)$, pour montrer que ces deux ensembles sont en bijection. Rappelons que dans le cas linéaire on a $\lambda_X(t) = \exp(t \cdot X)$ et l'on en déduit $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$, $X \mapsto \lambda_X(1) = \exp(X)$. Dans ce cas, $\lambda_X : \mathbb{R} \to G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifie l'équation différentielle

$$\lambda'_X(t) = \lambda_X(t) \cdot X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})\,.$$

La première étape est de réécrire cette équation indépendamment d'un plongement dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et du produit matriciel dans $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $g \in G$, notons $L_g : G \to G$, $x \mapsto gx$. On dispose donc de $L_{\lambda_X(t)} : G \to G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ puis de sa différentielle $dL_{\lambda_X(t)} : \mathfrak{g} = T_1G \to T_{\lambda_X(t)}$. L'équation différentielle vérifiée par λ_X devient alors

$$\lambda'(t) = dL_{\lambda(t)}(X) \in T_{\lambda_X(t)}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dans le cas où G n'est pas linéaire on est donc conduit à introduire pour tout $X \in \mathfrak{g}$ la solution $t \mapsto \lambda(t) \in G$ de l'équation différentielle $\lambda'(t) = dL_{\lambda(t)}(X)$ vérifiant la condition initiale $\lambda(0) = 1_G$. Il faut alors montrer que λ est définie sur $\mathbb{R}$ (existence globale au problème de Cauchy), que λ est unique (unicité au problème de Cauchy avec la condition initiale $\lambda(0) = 1_G$), puis que le morphisme $\mathfrak{g} \to G$, $X \mapsto \lambda(1)$ est lisse (régularité des solutions en le paramètre X).

On peut alors montrer que toutes ces propriétés sont vérifiées [**D**, 1.7.2] et que la propriété 5.40 reste valable pour tous les groupes de Lie. Nous ne le ferons pas, car nous nous restreindrons aux groupes de Lie compacts, qui sont linéaires par le théorème 4.25.

Remarque 5.52. — Dans le cas d'un groupe de Lie linéaire, on sait bien que toute équation différentielle linéaire d'ordre un à valeurs dans $\mathbb{R}^{n^2} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ et régulière en le paramètre. Le problème dans le cas où G est général est que notre équation différentielle prend ses valeurs dans la variété G. La méthode consiste alors à travailler localement, où $G = \mathbb{R}^d$ comme variété, et où on peut utiliser la théorie des équations différentielles usuelle, puis à globaliser.

5.53. Le foncteur Lie

Nous avons introduit dans le début de ce chapitre le foncteur Lie $G \mapsto Lie(G) = \mathfrak{g}$. Il n'induit pas une équivalence de catégorie puisque si $f : G' \to G$ est un revêtement, le morphisme $df : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme. Nous allons néanmoins voir qu'il induit une équivalence de catégorie lorsqu'on se restreint à la catégorie des groupes de Lie connexes et simplement connexes, qui n'admettent par définition pas de revêtement non trivial.

Notons $\mathfrak{GrpLie}$ la catégorie des groupes de Lie (avec morphismes continus ou différentiables, cela ne change rien d'après l'exercice 2.35). Notons $\mathfrak{GrpLie}_{co} \subset \mathfrak{GrpLie}$ la sous-catégorie pleine des groupes connexes et $\mathfrak{GrpLie}_{co,sc} \subset \mathfrak{GrpLie}_{co}$ la sous-catégorie pleine des groupes qui sont connexes et simplement connexes. Notons enfin $\mathfrak{AgLie}$ la catégorie des algèbres de Lie de dimension finie.

Remarque 5.54. — Rappelons qu'une sous-catégorie pleine est une sous-catégorie avec moins d'objets mais autant de morphismes, comme par exemple la catégorie des groupes abéliens dans la catégorie de tous les groupes.

Le théorème suivant est difficile et nous ne le prouverons pas. Sa démonstration utilise le théorème d'Ado : on peut plonger toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}_n$ pour n convenable. Il faut alors construire un groupe de Lie $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $Lie(G) = \mathfrak{g}$, c'est à dire prouver le second point du théorème. Il s'agit alors d'utiliser le théorème de Frobenius en géométrie différentielle.

Théorème 5.55. — *Toute algèbre de Lie est associée à un groupe de Lie connexe. Le foncteur Lie :* $\mathfrak{GrpLie}_{co} \to \mathfrak{AgLie}$ *est donc essentiellement surjectif. De plus si G est un groupe de Lie connexe d'algèbre $\mathfrak{g}$, pour toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ il existe un groupe de Lie connexe H muni d'un plongement dans G dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{h}$.*

Remarque 5.56. — Puisque l'opération $G \mapsto \mathfrak{g}$ est une différentiation, on dit que trouver G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est intégrer $\mathfrak{g}$. De même, trouver $H \subset G$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ s'appelle intégrer la sous-algèbre $\mathfrak{h}$. Comme on peut s'y attendre (rôle des constantes en analyse réelle !) l'opération d'intégration n'est pas bien définie. On verra dans la proposition suivante que l'intégration est bien définie si on impose à G d'être connexe et simplement connexe : c'est analogue à l'unicité d'une primitive s'annulant en 0.

Remarque 5.57. — Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie. Le théorème nous fournit un sous-groupe $H \subset G$ tel que H est un groupe de Lie d'algèbre $\mathfrak{h}$. Attention : H n'est pas fermé dans G en général, donc n'est pas un sous-groupe de Lie. Par exemple si $G = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, on a $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec crochet nul, et si on choisit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-droite de pente irrationnelle, on obtient $H = \mathbb{R}$ qui « s'enroule infiniment » dans le tore G.

Proposition 5.58. — *Soient G et G' deux groupes de Lie. On a*

i. *Si G est connexe, le morphisme* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{GrpLie}}(G, G') \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AgLie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ *est injectif.*

ii. *Si G est connexe et simplement connexe, ce morphisme est bijectif.*

Démonstration. — Si G est connexe, soit $f_1, f_2 : G \to G'$ deux morphismes tel que $df_1 = df_2$. Comme $f_i \circ \exp_G = \exp_{G'} \circ df_i$ pour $i = 1, 2$ on a que $f_1 = f_2$ sur l'image de $\exp_G$ donc le sous-groupe engendré qui est $G^0 = G$ par la remarque 5.41.

Si G est de plus simplement connexe, soit $g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un morphisme d'algèbres de Lie qu'on cherche à intégrer en $f : G \to G'$ tel que $df = g$. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ le graphe de g, qui est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. D'après le théorème 5.55, il existe un groupe de Lie connexe H muni d'un plongement $i : H \hookrightarrow G \times G'$ tel que $di : Lie(H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$. Considérons la projection sur le premier facteur $\pi : H \to G \times G' \to G$. Par construction $d\pi$ est un isomorphisme, donc π est un revêtement par l'exercice 5.27. Comme G est simplement connexe et H est connexe, on a donc que π est un isomorphisme, et H est le graphe du morphisme $G \to G'$ cherché. □

Remarque 5.59. — On peut formuler la proposition précédente en disant que le foncteur $Lie : \mathfrak{GrpLie}_{co} \to \mathfrak{AgLie}$ est fidèle, et que $Lie : \mathfrak{GrpLie}_{co,sc} \to \mathfrak{AgLie}$ est pleinement fidèle.

Remarque 5.60. — En combinant le théorème 5.55 et la proposition 5.58, on obtient une équivalence de catégories $Lie : \mathfrak{GrpLie}_{co,sc} \to \mathfrak{AgLie}$. Ainsi l'étude des algèbres permet de résoudre toutes les questions concernant les groupes de Lie simplement connexes.

Remarque 5.61. — Avec plus de technologie concernant les catégories, on aurait pu définir $\mathfrak{GrpLie}_{co}[\frac{1}{rev}]$ qui est la localisation de $\mathfrak{GrpLie}_{co}$ en les revêtements : les objets sont toujours les groupes de Lie connexes, mais on rajoute des morphismes en inversant de force les revêtements (exactement comme on construit $\mathbb{Q}$ en inversant de force les éléments non nuls de $\mathbb{Z}$). Le foncteur *Lie* : $\mathfrak{GrpLie}_{co}[\frac{1}{rev}] \to \mathfrak{AgLie}$ existe bien puisque la différentielle d'un revêtement est un isomorphisme, et ce foncteur serait aussi une équivalence de catégorie.

On a donc deux choix pour corriger le problème de non-injectivité de *Lie* au niveau des morphismes : soit restreindre les objets aux groupes simplement connexes, soit considérer tous les objets mais rajouter des morphismes en inversant formellement les revêtements.

5.62. Complexification

Rappelons la définition d'un groupe de Lie complexe vue au début du cours.

Définition 5.63. — Un groupe de Lie complexe est un groupe de Lie qui est une variété complexe où la multiplication et l'inversion sont holomorphes. Un morphisme de groupes de Lie complexe est un morphisme holomorphe de groupes.

Exemple 5.64. — $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot i)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ mais pas $\mathbb{R}$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, U_n, SU_n, O_n, SO_n.

Définition 5.65. — Une algèbre de Lie complexe (de dimension finie) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ qui est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie, et donc muni d'un crochet $[\cdot,\cdot]$, tel que $[\cdot,\cdot]$ soit $\mathbb{C}$-bilinéaire. Un morphisme d'algèbres de Lie complexes est un morphisme d'algèbres de Lie qui est $\mathbb{C}$-linéaire.

Exemple 5.66. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (réelle, mais on ne précise pas). Alors sa complexification $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est une algèbre de Lie complexe.

Théorème 5.67. — *Un groupe de Lie G est complexe si et seulement si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est complexe.*

Démonstration. — Il est clair d'après la construction de $G \mapsto \mathfrak{g}$ que si G est complexe, c'est aussi le cas de $\mathfrak{g}$. Si inversement $\mathfrak{g}$ est complexe, on en déduit par transport selon l'action par translation de G sur lui-même une structure de $\mathbb{C}$-fibré vectoriel sur le fibré tangent réel T_G de G. On utilise alors le théorème d'intégrabilité de Newlander-Nirenberg, qui garantit qu'une structure de $\mathbb{C}$-fibré vectoriel sur T_G provient d'une structure complexe sur G lorsqu'une hypothèse est vérifiée, hypothèse qui revient dans ce cas à la $\mathbb{C}$-linéarité du crochet. $\square$

Proposition 5.68. — *Soient G et G' des groupes de Lie complexes connexes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes de Lie. Alors f est holomorphe (ie est un morphisme de groupes de Lie complexes) si et seulement si df est $\mathbb{C}$-linéaire (ie est un morphisme d'algèbres de Lie complexes).*

Démonstration. — C'est un fait général sur les fonctions holomorphes, équivalent aux équations de Cauchy-Riemann : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable à deux variables réelle de différentielle en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ notée $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, qui est $\mathbb{R}$-linéaire. Alors f est holomorphe si seulement si $df_{(x,y)}$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui se traduit par le fait que $df_{(x,y)} \in \mathbb{R}^* \cdot SO_2$ ou que $\partial_x \mathfrak{Re}(f) = \partial_y \mathfrak{Im}(f)$ et $\partial_x \mathfrak{Im}(f) = -\partial_y \mathfrak{Re}(f)$. $\square$

Remarque 5.69. — Introduisons la catégorie $\mathfrak{GrpLie}_{co}^{hol}$ des groupes de Lie connexes complexes, et celle $\mathfrak{AgLie}^{hol}$ des algèbres de Lie complexes. De même en rajoutant l'indice « sc » pour simplement connexe. On peut résumer le théorème et la proposition précédents en disant qu'on a un foncteur

$$Lie : \mathfrak{GrpLie}_{co}^{hol} \to \mathfrak{AgLie}^{hol}$$

qui induit une équivalence de catégories

$$Lie : \mathfrak{GrpLie}_{co,sc}^{hol} \to \mathfrak{AgLie}^{hol} .$$

Définition 5.70. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie complexe. On dit que $\mathfrak{g}$ est une forme réelle de $\mathfrak{h}$ si il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$.

Remarque 5.71. — Dans ce cas on a $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})$. Bien sûr $\mathfrak{g}$ est toujours une forme réelle de $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ mais le point est qu'étant donné $\mathfrak{h}$, il y a plusieurs $\mathfrak{g}$ possibles. Voir l'exercice suivant.

Exercice 5.72. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}}$ vue comme algèbre de Lie réelle. Montrer que son complexifié $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est égal à $\mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}}$.

Exercice 5.73. — Montrer que $\mathfrak{u}_n = Lie(U_n)$ est une forme réelle de $\mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}}$ grâce au morphisme $\mathbb{C} \otimes \mathfrak{u}_n \to \mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}}$, $\lambda \otimes X \mapsto \lambda X$.

Le passage $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ d'une algèbre de Lie réelle à une algèbre de Lie complexe est automatique, car le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ existe sur les espaces vectoriels. On peut d'ailleurs vérifier qu'il vérifie une propriété universelle, comme tous les produits tensoriels. A priori rien de tel n'existe au niveau des groupes. Voilà une formalisation de ce que l'on cherche.

Définition 5.74. — Soit G un groupe de Lie. Une complexification de G est un groupe de Lie complexe G_c et un morphisme réel $\iota : G \to G_c$ tel que pour tout groupe de Lie complexe H on ait on ait une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{GrpLie}^{hol}}(G_c, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{GrpLie}}(G, H)$$

qui envoie f sur $f \circ \iota$.

Remarque 5.75. — Une telle propriété universelle garantit l'unicité de (G_c, ι), mais pas son existence. C'est différent du cas des algèbres de Lie, où le complexifié existe toujours et est de plus donné par la recette $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

L'existence d'une complexification au niveau des algèbres de Lie permet de construire une complexification au niveau des groupes dans le cas simplement connexe.

Proposition 5.76. — *Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il admet une complexification G_c tel que $Lie(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = Lie(G_c)$.*

Démonstration. — Notons $\mathfrak{g} = Lie(G)$. On peut appliquer le théorème 5.55 pour construire un groupe simplemement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Le théorème 5.67 montre de plus que G_c est un groupe de Lie complexe. Comme G est simplement connexe on a $\mathrm{Hom}(G, G_c) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$ d'après la proposition 5.58. L'inclusion canonique $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ fournit donc le morphisme $\iota : G \to G_c$.

Il reste à vérifier que le couple (G_c, ι) vérifie la propriété universelle de la complexification. Soit H un groupe de Lie complexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On veut vérifier si la composition avec ι induit un isomorphisme $\mathrm{Hom}^{hol}(G_c, H) = \mathrm{Hom}(G, H)$. Mais cela résulte du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^{hol}(G_c, H) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(G, H) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}^{hol}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}, \mathfrak{h}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales et la flèche horizontale basse sont des isomorphismes. On en déduit bien que la flèche horizontale haute est un isomorphisme. □

Corollaire 5.77. — *Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est une complexification de SU_n. Le groupe $SO_n(\mathbb{C})$ formé des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui préserve la forme quadratique $\sum_{i=1}^n x_i^2$ est une complexification de SO_n.*

On peut le même type de raisonnement lorsque G n'est pas simplement connexe, lorsqu'on a un candidat G_c simplement connexe et un morphisme $\iota : G \to G_c$. Le point est qu'on demande l'existence de ι alors que dans la proposition 5.76 son existence résulte de la simple connexité de G.

Proposition 5.78. — *Soit G un groupe de Lie connexe, G_c un groupe de Lie complexe simplement connexe tel que $Lie(G_c) = Lie(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $\iota : G \to G_c$ un morphisme de groupes de Lie. Alors (G_c, ι) est la complexification de G.*

Démonstration. — On raisonne exactement comme dans la démonstration de la proposition 5.76. Soit H un groupe de Lie complexe. Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}^{hol}(G_c, H) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(G, H) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}^{hol}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}, \mathfrak{h}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \end{tikzcd}$$

la flèche verticale gauche et la flèche horizontale basse sont des isomorphismes, et la flèche verticale droite est injective d'après la proposition 5.58. Cela suffit à garantir que la flèche horizontale haute est un isomorphisme. $\square$

Corollaire 5.79. — *Le groupe* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *est une complexification de* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. *Le groupe* $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ *est une complexification de* $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Exemple 5.80. — $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une complexification de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour l'inclusion canonique. De même pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$. Néanmoins, au vu de l'exercice 5.73, on peut penser qu'il existe des complexifications plus subtiles. C'est ce que montre le théorème suivant.

Le théorème suivant est le résultat le plus général d'existence de complexifications pour des groupes de Lie compacts connexes.

Théorème 5.81. — *Soit G un groupe de Lie connexe compact. Alors il existe un groupe de Lie connexe complexe canonique G_c et une injection $G \subset G_c$ qui identifie G à un sous-groupe compact maximal de G_c. On a $Lie(G)_{\mathbb{C}} = Lie(G_c)$.*

Démonstration. — Nous ne ferons qu'une esquisse de démonstration. Tout d'abord on vérifie que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une complexification de son compact maximal U_n. Cela repose sur la remarque 5.69 (quitte à remplacer $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ pour avoir un groupe simplement connexe) et sur le fait que $\mathfrak{u}_n \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}}$ d'après l'exercice 5.73.

Soit maintenant G un groupe de Lie compact connexe et $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un plongement donné par le théorème 4.25. D'après l'exercice 4.5 on peut supposer quitte à conjuguer que $G \subset U_n$. On note alors G^c le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des produites $g \cdot \exp(iX)$ avec $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$. On vérifie que c'est le bon candidat : c'est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et son algèbre de Lie est bien donnée par $\mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. $\square$

Remarque 5.82. — Un élément est bien sûr caché dans la démonstration précédente : il faut montrer que pour $G = U_n$ notre définition donne bien $G_c = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Cela se traduit par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = U_n \cdot \exp(i \cdot \mathfrak{gl}_n)$ ce qui est la décomposition polaire généralisant l'écriture de $z \in \mathbb{C}^*$ comme $z = r \cdot \exp(i\theta)$. En général on voit que G_c/G est difféomorphe à l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ donc que G et G_c ont même type d'homotopie. Attention bien sûr ces isomorphismes ne respectent pas la loi de groupe, tout comme la décomposition polaire.

Exemple 5.83. — $\mathbb{C}^*$ est une complexification de $\mathbb{S}^1$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une complexification de U_n et de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 5.84. — On peut comme pour les algèbres de Lie renverser la terminologie et dire que G est une forme réelle de G_c.

Remarque 5.85. — La géométrie algébrique apporte une autre perspective sur la complexification : plutôt que de parler du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, qui ne donne naissance à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par aucun procédé simple, on peut regarder le groupe algébrique $\mathrm{GL}_n = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x_{i,j}][\frac{1}{\det((x_{i,j})_{i,j})}])$ dont les $\mathbb{R}$-points est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Les $\mathbb{C}$-points de GL_n est alors la complexification $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Ce procédé marche pour tous les groupes de Lie définis par des équations polynomiales réelles.

5.85.1. Application aux représentations. — Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Notons $\mathrm{Rep}(G)$ la catégorie des représentations continues de dimension finie de G sur des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Rappelons qu'une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est la donnée d'un morphisme d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Soit $\mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$ la catégorie des représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$. On dispose donc d'un foncteur de dérivation $\mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$, $(V, \pi) \mapsto (V, d\pi)$.

Remarque 5.86. — Cela est bien justifié car d'après l'exercice 2.35, le morphisme $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ est différentiable donc $d\pi$ a un sens.

Proposition 5.87. — *Ce foncteur est une équivalence de catégorie si G est connexe et simplement connexe.*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 5.58. □

Remarque 5.88. — Si G est connexe mais pas simplement connexe on n'a pas du tout $\mathrm{Rep}(G) = \mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$. Prenons $G = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Alors les représentations irréductibles de G sont de dimension un de la forme $\exp(in\cdot)$ paramétrées par $n \in \mathbb{Z}$. Et $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ avec crochet trivial, donc les représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ sont de dimension un de la forme $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, $x \mapsto ax$ donc paramétrées par $a \in \mathbb{C}$. L'inclusion $\mathrm{Irr}(G) \subset \mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$ est donc isomorphe à $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ et n'est pas du tout un isomorphisme. Le même phénomène se passera lorsque $G = \mathbb{C}^*$. Il faudra en tenir compte pour adapter les résultats qui suivent du cas de SL_n à celui de GL_n.

Corollaire 5.89. — *Il y a équivalence entre les représentations de dimension finie (réelles ou complexes) de* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *et celles de* $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}$.

Remarque 5.90. — La proposition est fondamentale : elle nous dit qu'étudier les représentations de dimension finie de G n'est pas plus difficile qu'étudier les représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$, qui peuvent parfois s'expliciter à la main avec de l'algèbre linéaire. Par exemple les représentations (complexes) de dimension n de $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}$ sont en bijection avec les matrices $E, F, H \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ telles que $HE - EF = 2E$, $HF - FH = -2F$ et $EF - FE = H$ d'après l'exercice 5.8.

Remarque 5.91. — La proposition 5.87 est aussi intéressante dans le cas d'un groupe de Lie G connexe non simplement connexe. En effet son revêtement universel est alors un groupe de Lie $\tilde{G}$ simplement connexe avec $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}$ et l'on obtient identification entre représentations de $\tilde{G}$ et de $\mathfrak{g}$. Il reste à déterminer lesquelles de ces représentations correspondent à des représentations de G. Mais le groupe $\pi_1(G)$ est un sous-groupe distingué de $\tilde{G}$ et le quotient est isomorphe à G. Donc $\mathrm{Rep}(G)$ s'identifie à la sous-catégorie de $\mathrm{Rep}(\tilde{G})$ formé des (V, ρ) tels que ρ est trivial sur $\pi_1(G) \subset \tilde{G}$.

Remarque 5.92. — La proposition 5.87 est complètement fausse en dimension infinie. Il existe par exemple des représentations de $\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{C}}$ qui ne s'intègrent pas en des représentations de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (la théorie des modules de Verma fournit des exemples).

Définition 5.93. — Si G est un groupe de Lie complexe, on appelle représentation holomorphe de G une représentation (V, π) dans laquelle $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ est holomorphe. On obtient ainsi une sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}^{hol}(G) \subset \mathrm{Rep}(G)$.

Définition 5.94. — Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe, on appelle représentation holomorphe (ou complexe) de $\mathfrak{g}$ une représentation (V, ρ) où $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ est $\mathbb{C}$-linéaire. On obtient ainsi une sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}^{hol}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$.

Lemme 5.95. — *Le foncteur de dérivation* $\mathrm{Rep}^{hol}(G) \to \mathrm{Rep}^{hol}(\mathfrak{g})$ *est pleinement fidèle si G est connexe, et une équivalence si G est de plus simplement connexe.*

Exercice 5.96. — Dans cet exercice on s'intéresse à la représentation standard de $\mathfrak{sl}_n$ sur $\mathbb{R}^n$ et à ses variantes complexes, ou au niveau des groupes. Dans chaque cas suivant, dire si la représentation est réelle, complexe, holomorphe, si elle est intégrable à un groupe de Lie et si la représentation intégrée est réelle, complexe, holomorphe.

i. $\mathfrak{sl}_n$ agit sur $\mathbb{R}^n$.

ii. $\mathfrak{sl}_n$ agit sur $\mathbb{C}^n$.

iii. $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}$ agit sur $\mathbb{C}^n$.

iv. $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}$ agit sur $\mathbb{C}^n$ via la conjugaison complexe $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C} \to \mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de complexifiée $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$. Par propriété universelle du produit tensoriel, toute représentation complexe $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_\mathbb{C}(V)$ se prolonge uniquement en $\rho \otimes \mathrm{Id}_\mathbb{C} : \mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathrm{End}_\mathbb{C}(V)$ qui est de plus holomorphe. On a donc une équivalence de catégories

$$\mathrm{Rep}(\mathfrak{g}) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Rep}^{hol}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$$

d'inverse la restriction à $\mathfrak{g}$.

De même soit G un groupe de Lie muni d'une complexification $(G_c, \iota : G \to G_c)$. On obtient un foncteur

$$\mathrm{Rep}^{hol}(G_c) \longrightarrow \mathrm{Rep}(G)$$

qui à (V, π) associe $(V, \pi \circ \iota)$. La propriété universelle de la complexification montre qu'il est essentiellement surjectif. Il est de plus pleinement fidèle si G est connexe d'après la proposition 5.87, le lemme 5.95 et le caractère pleinement fidèle de la complexification sur les algèbres de Lie. Le théorème suivant récapitule nos constructions. Il constitue l'aboutissement de l'astuce de Weyl.

Théorème 5.97. — *Soit G un groupe de Lie. Soit (G_c, ι) une complexification de G. Notons $\mathfrak{g} = Lie(G)$ et $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = Lie(G_c)$. Considérons le diagramme de foncteurs*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}^{hol}(G_c) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Rep}(G) \arrow[d] \\
\mathrm{Rep}^{hol}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{Rep}(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

où les foncteurs horizontaux sont les restrictions et les foncteurs verticaux les dérivations.

i. *Si G est connexe, les foncteurs horizontaux de restrictions sont des équivalences de catégories.*

ii. *Si G est de plus simplement connexe, les foncteurs verticaux de dérivation sont aussi des équivalences de catégories.*

Ce théorème acquiert toute sa force lorsqu'on suppose G compact. Cette hypothèse permet déjà de prouver l'existence d'une complexification par le théorème 5.81. Elle garantit que les représentations irréductibles continues de G sont de dimension finies par le théorème de Peter-Weyl. Notons dans chaque cas $\mathrm{Irr} \subset \mathrm{Rep}$ les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles.

Corollaire 5.98. — *Soit G un groupe de Lie compact, connexe, simplement connexe de complexifié G_c. Les applications de restriction et de dérivation induisent des bijections*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Irr}^{hol}(G_c) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Irr}(G) \arrow[d] \\ \mathrm{Irr}^{hol}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \arrow[r] & \mathrm{Irr}(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

On peut parfois aller encore plus loin : soit G un groupe de Lie non compact qui admet un complexifié G_c, et H un autre groupe de Lie compact tel que $H_c = G_c$. On dit alors que G et H sont des formes réelles l'un de l'autre. On peut alors comparer représentations de G et de H en passant par celles de G_c. On obtient par exemple le corollaire suivant.

Corollaire 5.99. — *Les applications de restriction et de dérivation induisent des bijections*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Irr}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) \arrow[d] & \mathrm{Irr}^{hol}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Irr}(SU_n) \arrow[d] \\ \mathrm{Irr}(\mathfrak{sl}_n) & \mathrm{Irr}^{hol}(\mathfrak{sl}_{n,\mathbb{C}}) \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{Irr}(\mathfrak{su}_n) \end{tikzcd}$$

Remarque 5.100. — Il n'était pas clair que le foncteur de dérivation $\mathrm{Irr}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) \to \mathrm{Irr}(\mathfrak{sl}_n)$ est une équivalence car $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas simplement connexe. Mais c'est un corollaire du fait que toutes les autres flèches sont des équivalences dans le corollaire précédent (ou plus exactement, dans la variante de ce corollaire où on a remplacé Irr par Rep).

Corollaire 5.101. — *Les représentations de dimension finie de* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}$ *et* $\mathfrak{sl}_n$ *sont semi-simples, ie sommes directes de leurs sous-représentations irréductibles.*

Exercice 5.102. — Que donnerait le corollaire 5.99 pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et U_n ?

Exemple 5.103. — Le groupe U_n n'est pas le seul groupe unitaire : soit $n = p + q$ avec $p, q \geq 0$. On peut alors regarder la forme hermitienne non définie positive $|z_1|^2 + \ldots + |z_p|^2 - |z_{p+1}|^2 - \ldots - |z_n|^2$ sur $\mathbb{C}^n$ et noter $U_{p,q} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe qui stabilise cette forme. Ainsi $U_{n,0} = U_{0,n} = U_n$ est compact, mais $U_{p,q}$ est non compact dès que $pq > 0$. On vérifie que $U_{p,q}$ admet un complexifié, qui n'est autre que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Ainsi on obtient $\mathrm{Rep}(U_{p,q}) = \mathrm{Rep}^{hol}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{Rep}(U_n)$. Notons $\mathfrak{u}_{p,q}$ l'algèbre de Lie de $U_{p,q}$. Elle n'est pas isomorphe à $\mathfrak{u}_n$ mais on a $\mathfrak{u}_{p,q} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}} = \mathfrak{u}_n \otimes \mathbb{C}$. Ainsi $\mathrm{Rep}(\mathfrak{u}_{p,q}) = \mathrm{Rep}^{hol}(\mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}}) = \mathrm{Rep}(\mathfrak{u}_n)$.

On peut de même considérer les groupes orthogonaux non compacts $SO_{p,q}$ qui stabilisent la forme quadratique $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2$ et on obtient $\mathrm{Rep}(SO_{p,q}) = \mathrm{Rep}(SO_n)$ et $\mathrm{Rep}(\mathfrak{so}_{p,q}) = \mathrm{Rep}(\mathfrak{so}_n)$.

Remarque 5.104. — La question devient maintenant la suivante : quelle est la classe maximale de groupes et d'algèbre de Lie qui apparaissent lorsqu'on applique l'astuce de Weyl à un groupe de Lie compact ? Cette classe doit contenir $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $U_{p,q}$, $SO_{p,q}$, $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}}$, $\mathfrak{gl}_n$, $\mathfrak{u}_{p,q}$ et $\mathfrak{so}_{p,q}$. On verra dans le chapitre suivant qu'elle consiste en les groupes de Lie et les algèbres de Lie réductifs.

Exercice 5.105. — Soit K un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Est-ce vrai que la restriction à K induit une équivalence de catégorie entre représentations de dimension finie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et celles de K ?

Exercice 5.106. — Réutilisons la base de $\mathfrak{sl}_2$ donnée dans l'exercice 5.8. Pour toute représentation (V, ρ) de $\mathfrak{sl}_2$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $V_\lambda = \mathrm{Ker}(\rho(H) - \lambda \mathrm{Id}_V)$. On dit que λ est un poids de V si $V_\lambda \neq 0$.

i. Montrer que si λ est un poids de V alors $\rho(E) \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda+2}$ et $\rho(F) \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda-2}$.

ii. Monter qu'il existe au plus une représentation irréductible de dimension $m+1$ de $\mathfrak{sl}_2$ pour tout $m \geq 0$.

iii. Vérifier que ses poids sont $-m, -m+2, \cdots, m-2, m$. On dit qu'elle est de poids dominant m.

iv. Montrer que cette représentation (V_m, ρ_m) existe pour tout $m \geq 0$.

v. Comparer aux exercices de la partie 4.38.

CHAPITRE 6

STRUCTURE DES ALGÈBRES DE LIE

6.1. Algèbres de Lie résolubles et nilpotentes

Nous allons définir dans le cadre des algèbres de Lie des notions analogues à celles existant dans la théorie des groupes finis : algèbres de Lie résolubles et nilpotentes, abélianisé, ...

Définition 6.2. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Son commutant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est le sous-espace vectoriel engendré par les $[x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$.

Lemme 6.3. — *Le commutant* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *est un idéal. Le quotient* $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *est une algèbre de Lie abélienne. Elle est universelle pour cette propriété : pour toute algèbre de Lie abélienne* $\mathfrak{h}$ *et tout morphisme* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$*, il existe une unique factorisation* $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \to \mathfrak{h}$*.*

Le commutant mesure donc la complexité de l'algèbre $\mathfrak{g}$, c'est à dire sa distance à une algèbre de Lie abélienne.

Exemple 6.4. — Le commutant de $\mathfrak{gl}_n$ est égal au commutant de $\mathfrak{sl}_n$, et est égal à $\mathfrak{sl}_n$. En effet si $z = [x, y]$ la trace de z est nulle donc $z \in \mathfrak{sl}_n$. Inversement si $E_{i,j}$ désigne la matrice élémentaire on a $E_{i,i} - E_{j,j} = [E_{i,j}, E_{j,i}]$ et $2E_{i,j} = [E_{i,i} - E_{j,j}, E_{i,j}]$ ce qui montre que $E_{i,i} - E_{j,j}$ et $E_{i,j}$ sont dans $[\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_n]$ pour $i \neq j$. On conclut car ces éléments engendrent $\mathfrak{sl}_n$.

Définition 6.5. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On appelle série dérivée $D^i\mathfrak{g}$ la suite d'idéaux définie par $D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ et $D^{i+1}\mathfrak{g} = [D^i\mathfrak{g}, D^i\mathfrak{g}]$ pour tout $i \geq 0$.

Lemme 6.6. — *Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

i. $D^n\mathfrak{g} = 0$ *pour* n *grand.*

ii. *Il existe une suite de sous-algèbres* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^n = 0$ *telles que* $\mathfrak{g}^{i+1}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}^i$ *pour tout* i *et* $\mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}$ *est abélienne pour tout* i*.*

Définition 6.7. — Une algèbre de Lie est résoluble si elle vérifié les conditions du lemme précédent.

Définition 6.8. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On appelle série centrale $C^i\mathfrak{g}$ la suite d'idéaux définie par $C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ et $C^{i+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^i\mathfrak{g}]$ pour tout $i \geq 0$.

Lemme 6.9. — *Les deux conditions suivantes sont équivalents.*

i. $C^n\mathfrak{g} = 0$ *pour* n *grand.*

ii. *Il existe une suite d'idéaux* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^n = 0$ *tels que* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ *pour tout* i

Définition 6.10. — Une algèbre de Lie est nilpotente si elle vérifie les conditions du lemme précédent.

Exemple 6.11. — Soit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{gl}_n$ l'algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures et $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}$ celle des matrices triangulaires strictes. Alors $\mathfrak{b}$ est résoluble et $\mathfrak{n}$ nilpotente.

Lemme 6.12. — *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

i. *Si* $\mathfrak{g}$ *est résoluble (resp. nilpotente) toute sous-algèbre et tout quotient de* $\mathfrak{g}$ *est résoluble (resp. nilpotente).*

ii. *Si* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *est un idéal tel que* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *est résoluble, alors* $\mathfrak{g}$ *est résoluble.*

Remarque 6.13. — La propriété ii du lemme précédant est fausse dans le cas nilpotent : avec les notations de l'exemple 5.8, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}$ sont nilpotents mais $\mathfrak{b}$ ne l'est pas.

Toute sous-algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures est donc résoluble. Le théorème suivant montre que la réciproque est vraie. Ainsi les algèbres de Lie résolubles formalisent donc le concept de matrices triangulaires. Cela donne également une nouvelle perspective sur la notion de groupe fini résoluble.

Théorème 6.14. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble et* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n \otimes \mathbb{C}$*. Alors quitte à changer de base l'image de* ρ *est incluse dans l'algèbre* $\mathfrak{b}$ *des matrices triangulaires supérieures.*

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'il existe $v \in \mathbb{C}^n$ vecteur propre de tous les $\rho(X)$ pour $X \in \mathfrak{g}$: on construit ensuite la base de trigonalisation par récurrence sur n en considérant $\mathbb{C}^n/\mathbb{C} \cdot v$.

On montre l'existence de v par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ est résoluble, on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ donc il existe $\mathfrak{g}' \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ de codimension un dans $\mathfrak{g}$. Il existe donc $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathbb{R} \cdot X$. Par hypothèse de récurrence il existe $v \in \mathbb{C}^n$ vecteur propre de tous les $\rho(Y)$, $Y \in \mathfrak{g}'$. On a donc $\rho(Y)v = \lambda(Y)v$ avec $\lambda(Y) \in \mathbb{C}$. Soit $W \subset \mathbb{C}^n$ le sous-espace vectoriel engendré par $v^0 = v$, $v^1 = \rho(X)v$, $v^2 = \rho(X)^2v$, ... On vérifie alors que W est stable par $\mathfrak{g}'$ et que $\rho(Y)v^k - \lambda(Y)v^k$ est combinaison linéaire des v^l avec $l < k$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$.

Soit n le plus petit entier tel que v^{n+1} est dans l'espace engendré par $v^0, \cdots, v^n$. Alors $v^0, \cdots, v^n$ est une base de W dans laquelle la matrice de $\rho(Y)$ est triangulaire supérieure d'entrées diagonale constante $\lambda(Y)$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}'$. Donc $\mathrm{tr}_W \rho(Y) = (n+1)\lambda(Y)$.

Comme $\mathrm{tr}_W(\rho(X), \rho(Y)] = 0$ on a donc $\lambda([X,Y]) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}'$. Donc $Yv^k = \lambda(Y)v^k/$ Donc tout élément de W est vecteur propre commun des éléments de $\mathfrak{g}'$. Mais il suffit alors de choisir $v \in W$ un vecteur propre de X. $\square$

Corollaire 6.15. — *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

i. *Tout représentation irréductible complexe d'une algèbre de Lie résoluble est de dimension un.*

ii. *Une algèbre* $\mathfrak{g}$ *est résoluble si et seulement si* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *est nilpotente.*

Démonstration. — La première partie est un corollaire clair du théorème 6.14. Une implication de la seconde est claire : si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente, donc résoluble, alors comme $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est abélienne donc résoluble, on voit que $\mathfrak{g}$ est résoluble comme extension de résolubles.

Dans l'autre sens supposons $\mathfrak{g}$ résoluble. Appliquons alors le théorème 6.14 à la représentation adjointe ad. On en déduit que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}$. Donc $\mathrm{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\mathrm{ad}\mathfrak{g}, \mathrm{ad}\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}$ est bien nilpotente. On en déduit que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente. $\square$

Le théorème suivant s'appelle théorème de Engel. Il montre que la notion d'algèbre de Lie nilpotente n'est rien d'autre qu'une abstraction de celle de matrices triangulaire supérieure stricte.

Théorème 6.16. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie. Alors* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente si et seulement si* $\mathrm{ad}(X)$ *est nilpotent dans* $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ *pour tout* $X \in \mathfrak{g}$.

6.17. Algèbres de Lie semi-simples et réductives

6.17.1. Définition. — Dans la partie précédente, nous avons vu la notion d'algèbre résoluble, qui sont extensions d'algèbres abéliennes. Nous étudions maintenant le concept opposé d'algèbres semi-simples, qui n'ont aucune « partie » abélienne. Nous verrons que toute algèbre de Lie s'obtient en combinant algèbres résolubles et semi-simples. Puisque les algèbres de Lie résolubles sont celles dont toutes les représentations sont triangulaires supérieures, on a envie que les algèbres de Lie semi-simples soient celles formées de matrices qu'on ne peut pas simultanément triangulariser, comme $\mathfrak{sl}_n$. Il ne sera toutefois pas évident sur la définition que $\mathfrak{sl}_n$ est semi-simple et nous montrerons ce fait que dans le paragraphe suivant.

Définition 6.18. — Une algèbre de Lie est semi-simple si le seul idéal résoluble est nul.

Remarque 6.19. — Ainsi le centre des algèbres semi-simples est trivial, et on peut appliquer l'exercice 5.25 pour montrer le théorème d'Ado dans ce cas.

Définition 6.20. — Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est simple si elle est non abélienne et si elle ne contient pas d'autres idéaux que 0 et $\mathfrak{g}$.

Remarque 6.21. — On a imposé à $\mathfrak{g}$ d'être non abélienne pour exclure le cas $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$. Le lemme suivant permet déjà de comprendre pourquoi on exclut ce cas.

Lemme 6.22. — *Toute algèbre de Lie simple est semi-simple.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un idéal résoluble. Alors on a $\mathfrak{h} = 0$ ou $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Mais dans le second cas $\mathfrak{g}$ serait résoluble, donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ serait un idéal strict de $\mathfrak{g}$ non nul car $\mathfrak{g}$ est non abélienne. D'où la contradiction. □

Exemple 6.23. — L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$ est simple. Reprenons les notations de l'exercice 5.8. Tout idéal $\mathfrak{h}$ est stable par $\mathrm{ad}(H)$ donc est somme directe de droites engendrées par E, F ou H. Mais si $H \in \mathfrak{h}$ alors $2E = [H, E] \in \mathfrak{h}$ et de même $2F \in \mathfrak{h}$. Et si $E \in \mathfrak{h}$ on a $H = [E, F] \in \mathfrak{h}$ donc aussi $F \in \mathfrak{h}$. Donc $\mathfrak{h} = 0$ ou $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2$.

Exemple 6.24. — L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$ est semi-simple mais pas simple.

Remarque 6.25. — L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$ est simple, comme nous le verrons plus tard. La question de savoir si $\mathfrak{sl}_n$ est simple se ramène bien sûr à un problème d'algèbre linéaire. Toutefois ce problème n'est pas facile à résoudre et on touche là à un inconvénient majeur des algèbres de Lie : leur définition ne fait intervenir que de l'algèbre linéaire mais ce n'est pas pour autant qu'on sait montrer les théorèmes sans travail. Enfin $\mathfrak{gl}_n$ n'est pas semi-simple car elle est de centre non trivial.

Lemme 6.26. — *Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ il existe un unique idéal résoluble* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ *appelé « radical » tel que tout idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ soit inclus dans* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

Démonstration. — L'unicité est claire. Pour l'existence il suffit de voir que si $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ sont deux idéaux résolubles alors $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ reste un idéal résoluble et de définir $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ comme la somme des idéaux résolubles. □

Remarque 6.27. — Ainsi $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$.

Lemme 6.28. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ est semi-simple. Inversement si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est un idéal résoluble tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit semi-simple alors $\mathfrak{h} = \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. — Si $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ contient un idéal $\bar{\mathfrak{h}}$ résoluble, considérons son image inverse $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ par le morphisme $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. Comme $\mathfrak{h}$ est extension de résoluble, il est résoluble donc inclus dans $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ donc finalement $\bar{\mathfrak{h}} = 0$. □

Remarque 6.29. — Ainsi toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se dévisse dans une suite exacte courte $0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{ss} \to 0$ avec $\mathfrak{b}$ résoluble et $\mathfrak{g}_{ss}$ semi-simple. Le théorème suivant, appelé théorème de Lévi, montre en fait que cette suite se comporte comme un produit semi-direct de groupes.

Théorème 6.30. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Il existe alors une écriture $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{ss} \oplus \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ appelée décomposition de Lévi de $\mathfrak{g}$, dans laquelle $\mathfrak{g}_{ss}$ est une sous-algèbre de Lie semi-simple (attention : on ne demande pas que ce soit un idéal de $\mathfrak{g}$).*

Lemme 6.31. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et (V, ρ) une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$. Tout élément de $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ agit par des scalaires sur V, et tout élément de $[\mathfrak{g}, \mathrm{rad}(\mathfrak{g})]$ agit par zéro.*

Démonstration. — D'après le théorème 6.14, il existe $v \in V$ vecteur propre commun de tous les $X \in \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$, soit $\rho(X)v = \lambda(X)v$ pour tout $X \in \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. Notons V_λ le sous-espace des $w \in V$ tels que $\rho(X)w = \lambda(X)w$ pour tout $X \in \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 6.14, on voit que pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a $\rho(X)(V_\lambda) \subset V_\lambda$. Mais $V_\lambda \subset V$ est une sous-représentation donc par irréductibilité on a $V = V_\lambda$ ce qui prouve le premier point. Le second est alors évident □

Définition 6.32. — Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est réductive si $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$, donc si $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ est semi-simple.

Exemple 6.33. — L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2$ est réductive non semi-simple.

Remarque 6.34. — Les algèbres de Lie semi-simples sont bien sûr réductives car leur radical et leur centre sont nuls. L'algèbre de Lie $\mathbb{R}$ est réductive non semi-simple. La différence entre algèbres réductives et semi-simples réside donc dans la possibilité d'une partie abélienne dans $\mathfrak{g}$.

6.34.1. Forme de Killing. — Voyons les liens entre algèbres de Lie semi-simples et formes bilinéaires invariantes.

Définition 6.35. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et (V, ρ) une représentation de $\mathfrak{g}$. Une forme bilinéaire $B : V \otimes_{\mathbb{R}} V \to \mathbb{R}$ est invariante par $\mathfrak{g}$ si $B(\rho(X)v, w) + B(v, \rho(X)w) = 0$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$ et $v, w \in V$.

Cela s'applique en particulier à la représentation adjointe ad : $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. On trouve que $B : \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ est invariante si $B([X,Y],Z) + B(Y,[X,Z]) = 0$ pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. On dira alors que B est une forme invariante sur $\mathfrak{g}$.

Exemple 6.36. — Soit G un groupe de Lie et (V, π) une représentation de dimension finie de G. Une forme bilinéaire G-invariante sur V vérifie par définition $B(\pi(g) \cdot v, \pi(g) \cdot w) = B(v, w)$ pour tous $g \in G$ et $v, w \in V$. On obtient alors par dérivation une forme bilinéaire B invariante par action de $\mathfrak{g}$ dans le sens précédent.

Exemple 6.37. — Soit $\mathfrak{gl}_n = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ qu'on munit de la forme $B(X,Y) = \mathrm{tr}(XY)$. Alors B est invariante et symétrique.

L'exemple précédent se généralise en fait à toute algèbre de Lie munie d'une représentation.

Lemme 6.38. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et (V, ρ) une représentation. On définit alors $B_V(X,Y) = \mathrm{tr}_V(\rho(X) \circ \rho(Y))$ sur $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$. La forme B_V est $\mathfrak{g}$-invariante et symétrique.*

Proposition 6.39. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et (V, ρ) une représentation telle que B_V soit non-dégénérée sur $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g}$ est réductive.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $[\mathfrak{g}, \mathrm{rad}(\mathfrak{g})] = 0$. Soit $X \in [\mathfrak{g}, \mathrm{rad}(\mathfrak{g})]$ et soit W une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$. D'après le lemme 6.31, on sait que X agit par zéro sur W donc $X \in \mathrm{Ker}(B_W)$. Mais la trace est additive sur les suites exactes courtes donc en décomposant V en extension successive d'irréductible, on trouve $X \in \mathrm{Ker}(B_V)$. Comme B_V est non dégénérée on trouve donc $X = 0$. □

Corollaire 6.40. — *Les algèbres de Lie classiques $\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{gl}_n$, $\mathfrak{gl}_n \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{su}_n$, $\mathfrak{o}_n$, $\mathfrak{so}_n$ et $\mathfrak{sp}_{2n}$ sont réductives. Parmi elles, $\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{su}_n$, $\mathfrak{so}_n$ et $\mathfrak{sp}_{2n}$ sont semi-simples.*

Démonstration. — Dans chaque cas on a clairement une trace invariante non dégénérée et on applique la proposition 6.39 pour obtenir la réductivité. Une algèbre de Lie réductive est semi-simple si et seulement si son centre est trivial. Il suffit donc de classifier les centres des algèbres classiques pour obtenir la seconde assertion. □

Remarque 6.41. — La lettre « $\mathfrak{s}$ » commençant le sigle d'une algèbre de Lie (ou un groupe de Lie) veut donc dire « semi-simple ».

Exercice 6.42. — Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ la sous-algèbre de Lie formée des matrices triangulaires supérieures par blocs, les blocs diagonaux étant carrés de taille k et $n - k$. Calculer $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

Définition 6.43. — La forme de Killing est la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ obtenue en posant $K(x,y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y))$ où la trace est calculée dans $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$.

D'après le lemme 6.38, la forme K est invariante et symétrique.

Exercice 6.44. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Montrer que $K(x,y) = 2n \cdot \mathrm{tr}_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})}(xy)$.

Exercice 6.45. — Montrer les points suivants.

i. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et V, W des représentations irréductibles. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W) = 0$ si V n'est pas isomorphe à W et $\mathbb{R}$ si $V \xrightarrow{\sim} W$.

ii. En déduire que l'espace des formes bilinéaires $\mathfrak{g}$-invariantes sur V est de dimension ≤ 1.

iii. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Montrer que l'espace des formes bilinéaires invariantes sur $\mathfrak{g}$ est une droite engendrée par la forme de Killing. En particulier toutes les formes bilinéaires invariantes sont symétriques.

iv. En déduire la forme de Killing de $\mathfrak{so}_{2n+1}$.

Le théorème suivant s'appelle le « critère de Cartan ».

Théorème 6.46. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.*

***i**. $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $K(X,Y) = 0$ pour tous $X \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et $Y \in \mathfrak{g}$.*

***ii**. $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si K est non dégénérée.*

Démonstration. — Voir [**Ki**, 5.8] □

Lemme 6.47. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ l'est.*

Démonstration. — C'est évident avec le critère de Cartan puisqu'une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ est non dégénérée si et seulement si elle induit une forme non dégénérée sur $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. □

Exercice 6.48. — En considérant $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}$ vue comme algèbre de Lie réelle, montrer que l'énoncé analogue est faux pour les algèbres de Lie simples : $\mathfrak{g}$ peut être simple alors que $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ est produit de plusieurs algèbres simples.

Lemme 6.49. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un idéal. Il existe un idéal $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{h}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ pour la forme de Killing, qui est bien un idéal. Sur $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ la forme de Killing est nulle donc $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ est résoluble par le critère de Cartan. Donc $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$ puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple. On peut donc prendre $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}^\perp$. □

Remarque 6.50. — Ainsi tout idéal a un supplémentaire au sens des algèbres de Lie, et on retrouve la notion usuelle de semi-simplicité.

Corollaire 6.51. — *Une algèbre de Lie est semi-simple si et seulement si elle est somme directe d'algèbres de Lie simples.*

Corollaire 6.52. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple. Alors* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Démonstration. — On se réduit au cas où $\mathfrak{g}$ est simple d'après le corollaire précédent. Mais dans ce cas c'est clair car $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. □

Remarque 6.53. — On avait déjà montré que $[\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_n] = \mathfrak{sl}_n$ à la main. On voit qu'il s'agit d'un phénomène plus général.

Lemme 6.54. — *Soit* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ *une algèbre de Lie semi-simple, où les* $\mathfrak{g}_i$ *sont simples. Tout idéal de* $\mathfrak{g}$ *est égal à* $\oplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ *avec* $I \subset \{1, \cdots, k\}$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur k. C'est clair si $k = 1$. Sinon notons $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_k$ la projection. Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est un idéal, on a $\pi(\mathfrak{h}) = 0$ ou $\mathfrak{g}_k$ par simplicité de $\mathfrak{g}_k$. Dans le premier cas on a $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{k-1}$ et on applique l'hypothèse de récurrence. Si $\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_k$ on a $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{h}] = [\mathfrak{g}_k, \pi(\mathfrak{h})] = \mathfrak{g}_k$. Comme $\mathfrak{h}$ est un idéal on a donc $\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{h}$ donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{h}'$ avec $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{k-1}$ un idéal et on applique l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{h}'$. □

Corollaire 6.55. — *Tout idéal d'une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple. Tout quotient d'une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple.*

6.56. Lien avec les groupes compacts

Nous avons vu que la forme de Killing est non-dégénérée sur les algèbres de Lie semi-simples, et que cela les caractérise parmi toutes les algèbres de Lie. On peut se demander quelles peuvent être les signatures de cette forme. Cette question est reliée au fait que qu'un groupe de Lie sous-jacent soit compact.

Exercice 6.57. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_n$. Montrer que la forme $\mathrm{tr}(xy)$ est définie négative.

Théorème 6.58. — *Soit* G *un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$. *Alors* $\mathfrak{g}$ *est réductive et la forme de Killing est semi-définie négative de noyau égal à* $Z(\mathfrak{g})$. *La forme de Killing de la partie semi-simple* $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ *est donc définie négative.*

Inversement soit $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple dont la forme de Killing est définie négative. Alors il existe un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — Soit G un groupe de Lie compact. Alors toute représentation complexe de dimension finie $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est unitaire d'après le corollaire 4.3 donc tombe dans $U(V)$. On applique cela à $V = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ muni de la structure de représentation adjointe et on conclut par l'exercice 6.57 que la forme de Killing K est semi-définie négative de noyau $Z(\mathfrak{g})$ qui est le noyau de ad.

Inversement si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de forme de Killing définie négative, soit G un groupe de Lie d'algèbre $\mathfrak{g}$. Alors $B(x, y) = -K(x, y)$ est définie positive invariante par $\mathrm{Ad}(G)$. Donc $\mathrm{Ad}(G) \subset SO(\mathfrak{g})$ où le groupe orthogonal est relatif à la forme B. Donc $\mathrm{Ad}(G) = G^{ad} = G/Z(G)$ est un groupe compact. Son algèbre de Lie est $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ par semi-simplicité, donc G^{ad} répond à la question. □

Remarque 6.59. — Soit $G = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Alors $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ avec crochet trivial et forme de Killing nulle. Cela montre que dans la première assertion du théorème précédent, la conclusion « $\mathfrak{g}$ réductive » ne peut pas être remplacée par « $\mathfrak{g}$ semi-simple ».

Remarque 6.60. — On a mieux que dans le théorème : tout groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ semi-simple est compact. En particulier on peut choisir K simplement connexe. Cela est dû au fait (non évident) que le revêtement universel d'un groupe compact semi-simple reste compact car le π_1 est fini (c'est faux si $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui n'est pas semi-simple).

Exercice 6.61. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie avec forme de Killing définie positive. Montrer que $\mathfrak{g} = 0$.

Exercice 6.62. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. La forme de Killing est-elle définie positive ? Définie négative ?

Le théorème précédent concernait les algèbres de Lie semi-simples réelles. On a en fait un résultat qui porte sur les algèbre de Lie semi-simples complexes, mais il est plus difficile à prouver.

Théorème 6.63. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe. Alors il existe une sous-algèbre de Lie réelle $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et telle que $\mathfrak{k}$ soit l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact K. L'algèbre $\mathfrak{k}$ est unique à conjugaison près.*

Si G est un groupe de Lie complexe d'algèbre $\mathfrak{g}$, on peut choisir K inclus dans G. Dans ce cas G est une complexification de K et K est un compact maximal dans G. On appelle alors K la forme compact réelle de G, qui est bien définie à conjugaison près.

Exemple 6.64. — Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n,\mathbb{C}}$ alors $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}_n$ et $K = SU_n$.

Remarque 6.65. — On n'a jamais dit que toute algèbre de Lie semi-simple est associée à un groupe compact. Par exemple $\mathfrak{sl}_2$ est associée à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ou à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$, qui ne sont pas compacts. Le point est que la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_2$ est définie, mais ni négative ni positive (voir l'exercice 6.62).

On a simplement dit qu'une algèbre de Lie semi-simple complexe est la complexifiée d'une algèbre associée à un groupe compact.

Remarque 6.66. — On a effectué une construction « réciproque » $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{k}$ à la complexification $\mathfrak{k} \mapsto \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, en se restreignant à la catégorie des algèbres de Lie semi-simples. Attention : alors que $\mathfrak{k} \mapsto \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est bien défini, $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{k}$ n'est défini qu'à conjugaison près, donc n'est pas fonctoriel.

De même on a effectué une construction réciproque $G \mapsto K$ de la construction contenue dans le théorème 5.81 qui associait G à K comme complexifié. Il nous reste juste à donner un nom aux divers groupes complexes obtenus, ce qui est l'objet de la définition suivante.

Définition 6.67. — Soit G un groupe de Lie connexe. On dit que G est semi-simple si son algèbre de Lie est semi-simple.

Exemple 6.68. — Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ sont semi-simples complexes. Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$, SO_n, SU_n et $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ sont semi-simples réels.

Remarque 6.69. — Il est plus délicat de définir les groupes réductifs : il ne suffit pas que leur algèbre de Lie soit réductive. Par exemple le groupe $G = \mathbb{R}$ ne peut pas être considéré comme réductif, car sa catégorie des représentations n'est pas semi-simple. La définition générale des groupes réductifs utilise nécessairement la géométrie algébrique. Par contre, tous les groupes compacts connexes seront bien réductifs.

Nous avons presque atteint le but que nous nous étions fixé, à savoir caractériser toutes les algèbres de Lie complexes et tous les groupes de Lie complexes pouvant intervenir dans l'astuce de Weyl : ce sont les groupes et les algèbres réductives (voir le corollaire 6.73) Nous pouvons appliquer la théorie des représentations des groupes compacts et obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 6.70. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Les représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$ sont semi-simples, c'est à dire complètement réductibles, c'est à dire somme directe de leurs sous-représentations irréductibles.*

Soit G un groupe de Lie connexe semi-simple. Les représentations de dimension finie de G sont semi-simples.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{g}$ semi-simple. On a vu que $\mathrm{Rep}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Rep}^{hol}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}) = \mathrm{Rep}^{hol}(\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}) = \mathrm{Rep}(\mathfrak{k})$ où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie semi-simple réelle obtenue en appliquant le théorème 6.63. Soit enfin K groupe de Lie compact connexe simplement connexe d'algèbre de

Lie $\mathfrak{k}$, qui existe grâce à la remarque 6.60. On a donc $\mathrm{Rep}(\mathfrak{k}) = \mathrm{Rep}(K)$. Mais les représentations d'un groupe compact sont sommes directes d'irréductibles d'après le théorème de Peter-Weyl.

Soit G un groupe de Lie connexe semi-simple et soit $\tilde{G} \to G$ son revêtement universel. On a alors $\mathrm{Rep}(G) \subset \mathrm{Rep}(\tilde{G})$, l'image s'identifiant aux représentations de $\tilde{G}$ triviales sur le sous-groupe $\pi_1(G) \subset \tilde{G}$. En particulier si la catégorie $\mathrm{Rep}(\tilde{G})$ est semi-simple c'est aussi le cas de $\mathrm{Rep}(G)$. On se restreint donc à supposer G simplement connexe. Mais on a alors $\mathrm{Rep}(G) = \mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$ donc on est ramené au point précédent. □

Remarque 6.71. — Le cas réductif non semi-simple pose de petits problèmes : le groupe $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est réductif non semi-simple. Comme il est compact, $\mathrm{Rep}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est semi-simple. Son algèbre de Lie est $\mathbb{R}$ mais $\mathrm{Rep}(\mathbb{R})$ n'est pas semi-simple (voir l'introduction). Le point est que le foncteur de dérivation n'est pas une équivalence car $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est pas simplement connexe. Il faudrait remplacer $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par son revêtement universel $\mathbb{R}$ pour avoir une équivalence, mais on perd alors la compacité, donc la semi-simplicité des représentations.

Le corollaire suivant améliore la décomposition de Lévi (théorème 6.30) pour une algèbre de Lie réductive. L'amélioration est que cette fois $Z(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{g}^{ss}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, c'est à dire que l'écriture $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}^{ss}$ est vraiment un produit en tant qu'algèbre de Lie.

Corollaire 6.72. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive. On peut écrire $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}^{ss}$ où $\mathfrak{g}^{ss} = \mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ est semi-simple.*

Démonstration. — Le noyau de la représentation adjointe est $Z(\mathfrak{g})$, donc elle se factorise en action de $\mathfrak{g}^{ss} = \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ sur $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}^{ss}$ est semi-simple, cette représentation est somme directe d'irréductibles. Comme $Z(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ est une sous-représentation, il existe une sous-représentation $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, c'est à dire un idéal, tel que $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$ en tant qu'égalité de représentations, c'est à dire égalité d'algèbres de Lie. On a bien sûr $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{ss}$, ce qu'il fallait démontrer. □

On peut alors simplifier le lien entre algèbres de Lie et groupes compacts contenu dans le théorème 6.58.

Corollaire 6.73. — *Les algèbres de Lie associées aux groupes de Lie compacts sont exactement les algèbre de Lie réductives $\mathfrak{g}$ dont la forme de Killing est définie négative sur $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. — On a vu dans le théorème 6.58 que les algèbres associées aux groupes compacts vérifient la propriété attendue. Inversement si $\mathfrak{g}$ est réductive à forme de Killing définie négative sur $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$, il existe d'après le théorème 6.58 un groupe compact G^{ss}

d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$. Comme $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) \oplus Z(\mathfrak{g})$ d'après le corollaire 6.72, le groupe $G = G^{ss} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\dim_{\mathbb{R}}(Z(\mathfrak{g}))}$ a $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie. □

6.74. Classification

On peut chercher à classifier tous les groupes de Lie compacts en utilisant les techniques précédentes. On effectue plusieurs réductions successives de ce problème :

i. On se restreint à supposer G connexe : le groupe $\pi_0(G)$ peut être n'importe quel groupe discret, en particulier fini, et classifier ces objets est une question différente.

ii. On se restreint à supposer G simplement connexe : si $\tilde{G} \to G$ est le revêtement universel, alors $G = \tilde{G}/K$ avec $K = \pi_1(G) \subset \tilde{G}$ un sous-groupe discret central.

iii. D'après la remarque 5.60, G est alors uniquement déterminé par son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. De plus, cette algèbre est réductive par le théorème 6.58.

iv. Quitte à remplacer $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$, on peut supposer que $\mathfrak{g}$ est semi-simple. D'après le corollaire 6.72, on ne perd aucune information en faisant cette réduction car il est évident de classifier les algèbres de Lie abéliennes.

v. On remplace $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. D'après le théorème 6.63, étant donné $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ semi-simple complexe il existe à conjugaison près une seule $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ associée à un groupe compact.

vi. On se réduit à supposer $\mathfrak{g}$ simple par le corollaire 6.51.

Au final on se réduit à classifier les algèbres de Lie simples complexes. Il se trouve que la liste est explicite.

Théorème 6.75. — *Les algèbres de Lie simples complexes sont isomorphes à $\mathfrak{sl}_{n,\mathbb{C}}$, $\mathfrak{so}_{n,\mathbb{C}}$, $\mathfrak{sp}_{n,\mathbb{C}}$ ou bien aux algèbres de Lie exceptionnelles E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2.*

Démonstration. — Nous ne la ferons pas car elle nécessite une grande quantité de notations (voir [**Ki**, ch.7]). L'idée de base est de caractériser ces algèbres de Lie par leur système de racine (que nous rencontrerons dans le chapitre suivant) puis de classifier ces systèmes de racines par des objets appelés « diagrammes de Dynkin ». Tout cela repose sur de la géométrie convexe dans $\mathbb{R}^n$ et n'utilise pas de grande théorie mathématique. □

Remarque 6.76. — Les dimensions des algèbres de Lie exceptionnelles sont $\dim_{\mathbb{C}}(E_6) = 78$, $\dim_{\mathbb{C}}(E_7) = 133$, $\dim_{\mathbb{C}}(E_8) = 248$, $\dim_{\mathbb{C}}(F_4) = 52$ et $\dim_{\mathbb{C}}(G_2) = 14$. Il est possible que loin d'être des objets pathologiques, ces algèbres de Lie et les groupes associés soient en fait beaucoup plus intéressants que le trop banal $\mathfrak{sl}_n$.

Exemple 6.77. — On peut par exemple écrire des groupes compacts associés à toutes ces algèbres de Lie complexes simples via notre réduction préliminaire : à $\mathfrak{sl}_{n,\mathbb{C}}$ est associé SU_n, à $\mathfrak{so}_{n,\mathbb{C}}$ est associé SO_n et $\mathfrak{sp}_{2n,\mathbb{C}}$ est associé à un nouveau groupe compact, que nous n'avons jamais introduit et qui est noté SP_{2n}. Si $\mathbb{H}$ désigne les quaternions de Hurwitz munis de leur involution $*$, on a $SP_{2n} = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \mid g \cdot g^* = 1\} = SU_{2n} \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$. Bien sûr, les algèbres de Lie exceptionnelles sont associées à des groupes compacts exotiques dont il n'existe pas de description facile. Au final la catégorie des groupes compacts connexes compte donc peu de briques élémentaires.

CHAPITRE 7

STRUCTURE DES GROUPES DE LIE COMPACTS

7.1. Tores maximaux

Nous allons identifier certains sous-groupes abéliens maximaux dans les groupes compacts. Ils joueront un grand rôle dans la classification des représentations irréductibles.

Proposition 7.2. — *Tout groupe de Lie abélien compact connexe est isomorphe à* $(\mathbb{S}^1)^r = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$. *En particulier son exponentielle est surjective.*

Démonstration. — Soit G abélien compact connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Comme $[X, Y] = 0$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$ l'application $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ est un morphisme de groupe. Son image est donc un sous-groupe qui engendre la composante neutre G^0 donc $\exp_G$ est surjective. On a donc $G = \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\exp_G)$. Comme $\exp_G$ est un difféomorphisme local, son noyau est discret donc isomorphe à $\mathbb{Z}^r$. Comme G est compact on a bien $r = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. $\square$

Définition 7.3. — Soit G un groupe de Lie compact. Un tore maximal de G est un sous-groupe fermé $T \subset G$ abélien, connexe et maximal pour ces propriétés.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'un groupe compact. Une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale.

Il est clair que des sous-algèbres de Cartan existent bien.

Lemme 7.4. — *Soit G un groupe de Lie compact et $T \subset G$ un sous-groupe fermé connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$. Alors T est un tore maximal si et seulement si $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan. En particulier, il existe des tores maximaux.*

Remarque 7.5. — Rappelons que les algèbres de Lie des groupes compacts sont réductives réelles à forme de Killing semi-définie négative, donc n'épuisent pas toutes les algèbres de Lie réductives réelles (par exemple $\mathfrak{sl}_2$ n'est pas associée à un groupe compact). Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive quelconque, réelle ou complexe. On peut définir la notion de sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, qui sont des sous-algèbres abéliennes $\mathfrak{h}$ maximales mais il faut rajouter la condition que $\mathrm{ad}(X)$ soit diagonalisable pour tout $X \in \mathfrak{h}$. Cela élimine le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ et $\mathfrak{h}$ est l'ensemble des matrices strictement triangulaires supérieures.

Exemple 7.6. — Si $G = U_n$ alors $T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}),\ \theta_i \in \mathbb{R}\}$ est un tore maximal et $\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, \cdots, i\theta_n),\ \theta_i \in \mathbb{R}\}$ est une sous-algèbre de Cartan. Si $G = SU_n$ il faut rajouter en outre la condition $\sum_{i=1}^n \theta_i = 0$.

Exemple 7.7. — Si $G = SP_{2n} = U_{2n} \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, on a $Lie(SP_{2n}) = \mathfrak{u}_{2n} \cap \mathfrak{sp}_{2n,\mathbb{C}}$ qui est la forme réelle compacte de l'algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{sp}_{2n,\mathbb{C}}$. On ne la notera pas $\mathfrak{sp}_{2n}$ car nous avons déjà utilisé cette notation pour l'algèbre de Lie du groupe non compact $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Alors

$$T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}, e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}),\ \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

est un tore maximal et

$$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, \cdots, i\theta_n, -i\theta_1, \cdots, -i\theta_n),\ \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

une sous-algèbre de Cartan.

Exemple 7.8. — Si $G = SO_{2n}$ notons les ensembles de matrices diagonales par blocs

$$T = \left\{\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & \sin(\theta_n) \\ -\sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}\right),\ \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$$

est un tore maximal et

$$\mathfrak{t} = \left\{\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \theta_1 \\ -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & \theta_n \\ -\theta_n & 0 \end{pmatrix}\right),\ \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$$

est une sous-algèbre de Cartan. Lorsque $G = SO_{2n+1}$ il faut rajouter un bloc de taille 1 et considérer

$$T = \left\{\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & \sin(\theta_n) \\ -\sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}, 1\right),\ \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$$

et

$$\mathfrak{t} = \left\{\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \theta_1 \\ -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & \theta_n \\ -\theta_n & 0 \end{pmatrix}, 0\right),\ \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$$

Proposition 7.9. — *Soit G un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. Il existe $X \in \mathfrak{t}$ tel que $\mathfrak{t} = C_{\mathfrak{g}}(X) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\}$.*

Démonstration. — Soit $X_1, \cdots, X_k$ une $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{t}$. On a $\mathfrak{t} = \cap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X_i))$. En raisonnant par récurrence sur k, on voit qu'il suffit de prouver qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X_1 + tX_2)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X_1)) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X_2))$.

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ notons $\mathfrak{k}_X = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X))$ et $\mathfrak{r}_X = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X))^{\perp}$ où l'orthogonal est pris pour un produit scalaire invariant sur $\mathfrak{g}$. On a alors $\mathfrak{r}_X = \mathrm{Im}(\mathrm{ad}(X))$. . Si $X, Y \in \mathfrak{t}$ on a $[X, Y] = 0$ donc $\mathrm{ad}(Y)$ préserve $\mathfrak{k}_X$ et $\mathfrak{r}_X$ et

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{k}_Y) \oplus (\mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{r}_Y) \oplus (\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{k}_Y) \oplus (\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y) \, .$$

Si $\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y = 0$ alors $\mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{k}_Y = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X+Y))$. Si $\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y \neq 0$ alors $\mathrm{ad}(X+tY)$ est inversible sur $\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y$ lorsque $t = 0$ donc aussi lorsque $t \neq 0$ est bien choisi. On trouve finalement qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X+tY)) = \mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{k}_Y$. □

Définition 7.10. — Soit G un groupe de Lie compact et $X \in \mathfrak{g}$ tel que $C_{\mathfrak{g}}(X)$ soit une sous-algèbre de Cartan. On dit que X est un élément régulier.

Remarque 7.11. — Lorsque $G = SU_n$ les éléments réguliers sont les éléments diagonalisables à valeurs propres distinctes. On peut montrer en général que l'ensemble des éléments réguliers, qui est non vide d'après la proposition précédente, forme un ouvert dense dans $\mathfrak{g}$, ce qui n'est pas étonnant car il est donné par le lieu où un polynôme discriminant ne s'annule pas.

Proposition 7.12. — *Soit G un groupe de Lie compact et $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{Ad}(g)(X) \in \mathfrak{t}$.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, il existe $Y \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{t} = C_{\mathfrak{g}}(Y)$. On veut trouver $g \in G$ tel que $[\mathrm{Ad}(g)X, Y] = 0$. Il suffit pour cela de construire $g \in G$ tel que $([\mathrm{Ad}(g)X, Y], Z) = 0$ pour tout $Z \in \mathfrak{g}$ où $(\cdot, \cdot)$ désigne un produit scalaire invariant sur $\mathfrak{g}$. Considérons la fonction continue $G \to \mathbb{R}$, $g \mapsto (Y, \mathrm{Ad}(g)X)$. Il existe $g_0 \in G$ qui maximise cette fonction car G est compact. On trouve que $t \in \mathbb{R} \mapsto (Y, \mathrm{Ad}(\exp(tZ)) \circ \mathrm{Ad}(g)X)$ est maximale en $t = 0$. On obtient $0 = (Y, [Z, \mathrm{Ad}(g_0)X])$ comme voulu. □

Remarque 7.13. — De manière équivalente pour tout X il existe $g \in G$ tel que $X \in \mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{t})$. Les conjugués d'une sous-algèbre de Cartan recouvrent donc $\mathfrak{g}$. On verra dans le théorème 7.16 que les conjugués d'un tore maximal de G recouvrent G.

Corollaire 7.14. — *Soit G un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors*

i. *G agit transitivement par* Ad *sur l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

ii. *G agit transitivement par conjugaison sur l'ensemble des tores maximaux de G.*

Démonstration. — Pour le premier point, notons $\mathfrak{t}_i = C_{\mathfrak{g}}(X_i)$ des sous-algèbres de Cartan pour $i = 1, 2$. D'après la proposition précédente il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{Ad}(g)X_1 \in \mathfrak{t}_2$. Mais alors $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}_1 = C_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ad}(g)X_1)$ et comme $\mathrm{Ad}(g)X_1 \in \mathfrak{t}_2$ et $\mathfrak{t}_2$ est abélienne, on a $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}_1 \supset \mathfrak{t}_2$. Hors $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}_1$ reste abélienne puisque elle est isomorphe à $\mathfrak{t}_1$ donc on conclut par maximalité de $\mathfrak{t}_2$.

Le second point résulte du premier car tout tore maximal s'écrit $\exp(\mathfrak{t})$ pour $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan d'après le lemme 7.2. $\square$

Remarque 7.15. — En particulier, la dimension d'un tore maximal et d'une sous-algèbre de Cartan est bien déterminée. On l'appelle rang du groupe G. Le rang de SU_n est $n-1$, celui de U_n, SO_{2n}, SO_{2n+1} et SP_{2n} est n.

Théorème 7.16. — *Soit G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal et $g \in G$. Les points suivants sont vérifiés.*

i. *Il existe $h \in G$ tel que $hgh^{-1} \in T$.*

ii. *G est l'union des hTh^{-1} pour $h \in G$.*

iii. *L'exponentielle $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ est surjective.*

Démonstration. — Pour le premier point, nous renvoyons à [**S**, th.5.12]. Le second point en résulte immédiatement, et le troisième aussi puisque $\exp_T : \mathfrak{t} \to T$ est surjective pour tout tore maximal d'après la proposition 7.2. $\square$

Remarque 7.17. — Lorsque $G = SO_n$ ou U_n, ce théorème est équivalent à dire que tout $g \in G$ est diagonalisable, qui est conséquence du théorème de diagonalisation des endomorphismes normaux. Lorsque G n'est pas compact, par exemple $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un tel énoncé est bien sûr complètement faux. On peut toujours définir la notion de tore maximal et de sous-algèbre de Cartan, mais ils ne recouvrent pas G et $\mathfrak{g}$.

Corollaire 7.18. — *Soit G un groupe de Lie compact connexe et T un tore maximal. Le centralisateur $C_G(T) = \{g \in G \,|\, gtg^{-1} = t \ \forall t \in T\}$ est égal à T et le centre $Z(G)$ est inclus dans T.*

Démonstration. — Il suffit de prouver le premier point. L'inclusion $T \subset C_G(T)$ est évidente puisque T est abélien. Inversement soit $g \in C_G(T)$ et considérons le groupe compact connexe $C_G(g)^0$. D'après le théorème 7.16 il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que $g = \exp(X)$. La considération du chemin $t \mapsto \exp(tX)$ montre que $g \in C_G(g)^0$. Puisque T est connexe inclus dans $C_G(g)$ on a $T \subset C_G(g)^0$ et T est donc un tore maximal de $C_G(g)^0$. On applique le théorème 7.16 au groupe connexe $C_G(g)^0$ et on en déduit qu'il existe $h \in C_G(g)^0$ tel que $hgh^{-1} \in T$. Mais par construction $hgh^{-1} = g$ donc on a bien $g \in T$. $\square$

Remarque 7.19. — L'égalité analogue $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ est évidente car pour tout $X \in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, l'algèbre $\mathfrak{t} \oplus \mathbb{R} \cdot X$ est abélienne et $\mathfrak{t}$ est abélienne maximale. Le point est que T n'était que maximal parmi les groupes *connexes* abéliens fermés de G et que l'égalité $C_G(T) = T$ n'est donc pas évidente.

7.20. Poids et racines

Soit G un groupe de Lie compact et (V, π) une représentation complexe de dimension finie de G. Soit $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan de complexification $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. D'après le théorème 4.2, il existe une application bilinéaire hermitienne $(\cdot, \cdot)$ qui est G-invariante sur V. Elle induit par dérivation une application bilinéaire $\mathfrak{g}$-invariante sur V. Cette $\mathfrak{g}$-invariance se retraduit en disant que $d\pi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} : \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ envoie $\mathfrak{g}$ dans les endomorphismes anti-hermitiens et $i \cdot \mathfrak{g}$ dans les endomorphismes hermitiens. Notons enfin $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ le dual de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$.

Définition 7.21. — Soit G un groupe de Lie compact, (V, π) une représentation complexe de dimension finie et $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. L'ensemble des poids de V est l'ensemble fini $P(V) = P(V, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ tel qu'on ait la décomposition

$$V = \bigoplus_{\alpha \in P(V)} V_\alpha$$

dans laquelle $V_\alpha = \{v \in V \mid d\pi(H)v = \alpha(V) \cdot v \ \forall H \in \mathfrak{t}\}$ est non nul.

Remarque 7.22. — On a donc cherché à diagonaliser simultanément l'ensemble des opérateurs $d\pi(H)$, $H \in \mathfrak{t}$ qui commutent entre eux, et les poids codent les valeurs propres.

Exemple 7.23. — Si $G = SU_2$ et $V = V_m$ décrite dans l'exercice 4.43, les poids sont $-m, -m+2, \cdots, m-2, m$. Ce cas est spécialement simple car la dimension de $\mathfrak{t}$, c'est à dire le rang de SU_2, est égale à un.

Proposition 7.24. — *Les points suivants sont vérifiés.*

i. *Pour tout poids $\alpha \in P(V)$, la forme linéaire $\alpha : \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ est imaginaire pure sur $\mathfrak{t}$ et réelle sur $i \cdot \mathfrak{t}$.*

ii. *Soit T un tore maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. Pour tout $t \in T$ soit $H \in \mathfrak{t}$ tel que $\exp_G(H) = t$. Pour tout $\alpha \in P(V)$ et tout $v \in V_\alpha$, on a $\pi(t)v = \exp(\alpha(H)) \cdot v$.*

Démonstration. — Le premier point est résulte du fait que $d\pi$ est anti-hermitienne sur $\mathfrak{t}$ et hermitienne sur $i \cdot \mathfrak{t}$. Le second point est évident. □

Considérons maintenant le cas particulier où $V = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et $\pi = \mathrm{Ad}$. On peut donc parler des poids de $\mathfrak{t}$ agissant sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Lorsque $\alpha = 0 \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ on a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},\alpha} = \{Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \,|\, [H, Z] = 0 \, \forall H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ par maximalité de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ comme sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Pour séparer le cas $\alpha = 0$ du cas $\alpha \neq 0$, on introduit la terminologie suivante.

Définition 7.25. — Soit G un groupe de Lie compact et $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. L'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ est l'ensemble fini $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ des $\alpha \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^* - 0$

tels que $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}_\mathbb{C} \mid [H,X] = \alpha(X)\cdot X \ \ \forall H \in \mathfrak{t}_\mathbb{C}\}$ est non nul. On a donc

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{t}_\mathbb{C} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} \mathfrak{g}_\alpha \,.$$

Remarque 7.26. — Par définition les poids $\alpha : \mathfrak{t}_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ proviennent par dérivation d'un morphisme $\xi_\alpha : T \to \mathbb{C}^*$ donnant une valeur propre de T agissant par Ad sur $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Autrement dit on a $\alpha = \xi_\alpha \circ \exp_G$ ce qui est le second point de la proposition 7.24.

Exercice 7.27. — Soit $G = U_n$ ou SU_n. Considérons le tore maximal $\mathfrak{t}$ de l'exemple 7.6. On a $\mathfrak{t}_\mathbb{C} = \{\mathrm{diag}(z_1,\cdots,z_n), z_i \in \mathbb{C}\}$ (avec condition $\sum_i z_i = 0$ pour SU_n) et on munit $\mathfrak{t}_\mathbb{C}^*$ de sa base (famille génératrice pour SU_n) canonique $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ où ε_i sélectionne la i-ème coordonnée.. Vérifier que $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j),\ 1 \le i < j \le n\}$ et que $\mathfrak{g}_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = \mathbb{C}\cdot E_{i,j}$.

Remarque 7.28. — On remarque que les poids de U_n et de SU_n sont les mêmes. En général si $G \to G'$ est un morphisme de noyau central et de conoyau abélien on a $\Delta(\mathfrak{g}'_\mathbb{C}) = \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$.

Remarque 7.29. — On voit que les espaces de poids $\mathfrak{g}_\alpha$ formalisent la notion de matrice élémentaire $E_{i,j}$.

Exercice 7.30. — Soit $G = SP_{2n}$. Considérons le tore maximal $\mathfrak{t}$ de l'exemple 7.7. On a $\mathfrak{t}_\mathbb{C} = \{\mathrm{diag}(z_1,\cdots,z_n,-z_1,\cdots,-z_n), z_i \in \mathbb{C}\}$ et on munit $\mathfrak{t}_\mathbb{C}^*$ de sa famile génératrice $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{2n}$ où ε_i sélectionne la i-ème coordonnée. Vérifier que $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ est l'union de $\{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j),\ 1 \le i < j \le n\}$ et de $\{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j),\ 1 \le i \le j \le n\}$. Vérifier que $\mathfrak{g}_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = \mathbb{C}\cdot(E_{i,j} - E_{j+n,i+n})$, $\mathfrak{g}_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = \mathbb{C}\cdot(E_{i,j+n} + E_{j,i+n})$, $\mathfrak{g}_{-\varepsilon_{i,i}-\varepsilon_{i,j}} = \mathbb{C}\cdot(E_{i+n,j} + E_{j+n,i})$, $\mathfrak{g}_{2\varepsilon_{i,i}} = \mathbb{C}\cdot E_{i,i+1}$ et $\mathfrak{g}_{-2\varepsilon_{i,i}} = \mathbb{C}\cdot E_{i+n,i}$.

Exercice 7.31. — Pour le groupe SO_{2n} on peut effectivement directement les calculs mais ils ne prennent pas une forme agréable. On va donc changer la matrice de la forme quadratique donnant naissance à SO_{2n}. Notons E_{2n} la matrice donné par blocs de taille n

$$E_{2n} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

et notons $SO(E_{2n}) = \{g \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid \bar{g} = E_{2n} g E_{2n},\ g^t E_{2n} g = E_{2n}\}$,

$$\mathfrak{so}(E_{2n}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n,\mathbb{C}} \mid \bar{X} = E_{2n} X E_{2n},\ X^t E_{2n} + E_{2n} X = 0\}$$

et

$$\mathfrak{so}_\mathbb{C}(E_{2n}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n,\mathbb{C}} \mid X^t E_{2n} + E_{2n} X = 0\}\,.$$

Vérifier que SO_{2n} est isomorphe à $SO(E_{2n})$, que $\mathfrak{so}_{2n}$ est isomorphe à $\mathfrak{so}(E_{2n})$ et que $\mathfrak{so}_{2n,\mathbb{C}}$ est isomorphe à $\mathfrak{so}_{2n,\mathbb{C}}(E_{2n})$. [indication : conjuguer par

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ iI_n & -iI_n \end{pmatrix}$$

qui vérifie $T^tT = E_{2n}$] Vérifier qu'un tore maximal est

$$T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}, e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}),\ \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

et que la sous-algèbre de Cartan correspondante est

$$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, \cdots, i\theta_n, -i\theta_1, \cdots, -i\theta_n),\ \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

de complexifiée

$$\mathfrak{t}_\mathbb{C} = \{\mathrm{diag}(z_1, \cdots, z_n, -z_1, \cdots, -z_n),\ z_i \in \mathbb{C}\}\ .$$

Vérifier que les racines sont $\{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}$ où ε_i sélectionne la i-ème coordonnée.

Exercice 7.32. — Pour le groupe SO_{2n+1} c'est très similaire. Considérons la matrice de taille $(2n+1)$

$$E_{2n+1} = \begin{pmatrix} E_{2n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et définissons $SO(E_{2n+1})$, $\mathfrak{so}(E_{2n+1})$ et $\mathfrak{so}_\mathbb{C}(E_{2n+1})$ par les mêmes formules que l'exercice précédent, en remplaçant partout $2n$ par $2n+1$. Vérifier qu'un tore maximal est donné par

$$T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}, e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}, 1),\ \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

et que la sous-algèbre de Cartan correspondante est

$$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, \cdots, i\theta_n, -i\theta_1, \cdots, -i\theta_n, 0),\ \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

de complexifiée

$$\mathfrak{t}_\mathbb{C} = \{\mathrm{diag}(z_1, \cdots, z_n, -z_1, \cdots, -z_n, 0),\ z_i \in \mathbb{C}\}\ .$$

Vérifier que les racines sont $\{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j),\ 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ où ε_i sélectionne la i-ème coordonnée.

7.32.1. Réseau. — Notons $(i\mathfrak{t})^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(i\mathfrak{t}, \mathbb{R})$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de complexifié $\mathfrak{t}_\mathbb{C}^*$. Nous avons vu que les poids $\alpha \in P(V)$ et les racines $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ sont des éléments de $\mathfrak{t}_\mathbb{C}^*$ qui sont réels sur $i\mathfrak{t}$. Ils définissent donc un élément toujours noté $\alpha \in (i\mathfrak{t})^*$ qui détermine $\alpha \in \mathfrak{t}_\mathbb{C}^*$ par $\mathbb{C}$-linéarité.

Exemple 7.33. — Si $G = U_n$ on a vu que $\mathfrak{t} = \{(i\theta_1, \cdots, i\theta_n),\ \theta_i \in \mathbb{R}\}$ et que $\mathfrak{t}_\mathbb{C} = \{(z_1, \cdots, z_n),\ z_i \in \mathbb{C}\}$. Les racines sont de la forme $\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$ donc sont bien réelles sur $i\mathfrak{t}$. Elles induisent la forme linéaire réelle $\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$ sur $i\mathfrak{t} = \mathbb{R}^n$.

Définition 7.34. — Soit G un groupe compact et $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan de tore maximal associé T. On note $A = \{\lambda \in (i\mathfrak{t})^* \mid \lambda(\mathrm{Ker}(\exp_T)) \subset 2i\pi\mathbb{Z}\}$ qu'on appelle réseau des poids analytiques entiers.

Si r est le rang de G et $r' \leq r$ est le rang semi-simple, c'est à dire le rang de $G/Z(G)$, on peut vérifier que $(i\mathfrak{t})^* \simeq \mathbb{R}^r$ et $A \simeq \mathbb{Z}^{r'}$.

Lemme 7.35. — *Soit $\lambda \in (i\mathfrak{t})^*$ et $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ son prolongement $\mathbb{C}$-linéaire. On a $\lambda \in A$ si et seulement si il existe un morphisme $\xi_\lambda : T \to \mathbb{C}^*$ de différentielle λ, c'est à dire tel que $\xi_\lambda(\exp_T(H)) = e^{\lambda(H)}$ pour tout $H \in \mathfrak{t}$. La correspondance $\lambda \mapsto \xi_\lambda$ réalise un isomorphisme $A = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*)$.*

Exemple 7.36. — Pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ on a $\alpha \in A$. De même pour toute représentation V de G et tout $\alpha \in \Delta(V)$ on a $\alpha \in A$.

Remarque 7.37. — Soit r le rang de G. On a alors $T = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$. Comme $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est pas simplement connexe, la différentiation induit une application injective non surjective $\mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(i\mathfrak{t}, \mathbb{R})$. Le réseau A est l'image de cette injection.

Remarque 7.38. — Soit $G' \to G$ un revêtement de groupes de Lie compacts. On a alors $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$ et $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \Delta(\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}})$. Par contre les réseaux A et A' ne sont pas les mêmes, mais seulement d'indice fini l'un dans l'autre. Il faut donc faire attention lorsqu'on travaille avec des groupes du type $PSU_n = SU_n/Z(SU_n)$ ou $\widetilde{SO}_n$ le revêtement universel de SO_n.

Exemple 7.39. — Reprenons les notations des exercices 7.27 et suivants. Pour toute collection de scalaire $\lambda_i \in \mathbb{C}$ on note $(\lambda_i) = \sum_i \lambda_i \cdot \varepsilon_i$ où ε_i est la forme linéaire sur $\mathfrak{t}$ définie dans ces exercices.

- **i**. Si $G = SU_n$, on a $A = \{(\lambda_i + \lambda_0/n),\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$.
- **ii**. Si $G = Sp(2n)$, on a $A = \{(\lambda_i),\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$.
- **iii**. Si $G = SO(E_n)$, on a $A = \{(\lambda_i),\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$.

7.39.1. Groupe de Weyl. — Il s'agit d'un groupe de symétrie qui généralise la notion de matrices de permutation.

Définition 7.40. — Soit G un groupe de Lie compact connexe et T un tore maximal. On note $W = W(G) = W(G,T) = N_G(T)/T$ où $N_G(T) = \{g \in G \mid gTg^{-1} = T$ est le normalisateur de T dans G. On appelle W le groupe de Weyl de G.

Remarque 7.41. — Comme les tores maximaux sont tous conjugués d'après le corollaire 7.14, le groupe de Weyl vu comme groupe abstrait ne dépend pas du choix de T.

Puisque $N_G(T)$ agit par conjugaison sur T et que $T \subset N_G(T)$ agit trivialement comme T est abélien, on en déduit une action de W sur T. Par dérivation et dualité, W agit sur $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, $(i\mathfrak{t})^*$ et $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$.

Théorème 7.42. — *Les points suivants sont vérifiés.*

- ***i***. *Le groupe W est fini.*
- ***ii***. *Il agit de manière injective sur $\mathfrak{t}$.*

iii. *Cette action préserve* $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset (i\mathfrak{t})^*$ *et* $A \subset (i\mathfrak{t})^*$.

Démonstration. — Voir [**S**, th.6.36] □

Exemple 7.43. — Reprenons les notations des exercices 7.27 et suivants.

i. Si $G = SU_n$ ou U_n, on a $W = \mathfrak{S}_n$ qui agit sur $\mathfrak{t}$ par permutation des coordonnées.

ii. Si $G = Sp(2n)$, on a $W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\pm 1)^n$ où le produit semi-direct est pris grâce à l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $(\pm 1)^n$ par permutation des coordonnées. Soit $(\sigma, e_1, \cdots, e_n) \in W$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $e_i = \pm 1$. L'action de $(\sigma, e_1, \cdots, e_n)$ envoie $\mathrm{diag}(i\theta_1, \cdots, i\theta_n, -i\theta_1, \cdots, -i\theta_n) \in \mathfrak{t}$ sur $\mathrm{diag}(e_{\sigma(1)} i\theta_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)} i\theta_{\sigma(n)}, -e_{\sigma(1)} i\theta_{\sigma(1)}, \cdots, -e_{\sigma(n)} i\theta_{\sigma(n)})$.

iii. Si $G = SO(E_{2n})$, on a $W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\pm 1)^{n-1}$. Un élément agit sur

$$\mathrm{diag}(i\theta_1, \cdots, i\theta_n, -i\theta_1, \cdots, -i\theta_n) \in \mathfrak{t}$$

par permutation et changement pair de signe. Plus précisément l'élément $(-1, 1, \cdots, 1) \in (\pm 1)^{n-1}$ envoie $\mathrm{diag}(i\theta_1, \cdots, i\theta_n, -i\theta_1, \cdots, -i\theta_n)$ sur

$$\mathrm{diag}(-i\theta_1, -i\theta_2, i\theta_3, \cdots, i\theta_n, i\theta_1, i\theta_2, -i\theta_3, \cdots, -i\theta_n)\,,$$

l'élément $(1, -1, 1, \cdots, 1) \in (\pm 1)^{n-1}$ envoie $\mathrm{diag}(i\theta_1, \cdots, i\theta_n, -i\theta_1, \cdots, -i\theta_n)$ sur

$$\mathrm{diag}(i\theta_1, -i\theta_2, -i\theta_3, \cdots, i\theta_n, -i\theta_1, i\theta_2, i\theta_3, \cdots, -i\theta_n)$$

et ainsi de suite.

iv. Si $G = SO(E_{2n+1})$, on a $W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\pm 1)^n$. Il agit sur $\mathrm{diag}(i\theta_1, \cdots, i\theta_n, -i\theta_1, \cdots, -i\theta_n, 0) \in \mathfrak{t}$ par échanges des coordonnées (sauf la dernière) et changement de signe.

7.43.1. Racines simples et positives. — Il est clair dans les cas de U_n, Sp_{2n},... que certaines racines permettent d'en engendrer d'autres par somme et changement de signe. Formalisons le concept de « base » de l'ensemble des racines.

Définition 7.44. — Soit G un groupe de Lie compact et $\mathfrak{t}$ une algèbre de Cartan. Notons $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}/Z(\mathfrak{g})$.

i. Un système de racines simples $\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est un sous-ensemble qui forme une $\mathbb{R}$-base de $(i\mathfrak{t}')^*$ et tel que tout $\beta \in \Delta$ s'écrive $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \cdot \alpha$ avec les $(k_\alpha)_\alpha$ des entiers soit tous positifs, soit tous négatifs.

ii. Le système de racine positives Δ^+ associé est l'ensemble des $\beta \in \Delta$ de la forme $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \cdot \alpha$ avec $k_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Pi$.

iii. Le système de racine négatives Δ^- associé est l'ensemble des $\beta \in \Delta$ de la forme $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \cdot \alpha$ avec $k_\alpha \leq 0$ pour tout $\alpha \in \Pi$.

On a donc $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^+ \coprod \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^-$. Il n'est pas évident qu'un système de racines simple existe pour tout groupe compact, même si c'est vrai [**S**, 6.4.3]. Pour les groupes classiques c'est évident comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 7.45. — Avec les notations des exercices 7.27 et suivants, les ensembles suivants sont des systèmes de racines simples et positives.

i. Si $G = U_n$ ou SU_n, $\Pi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1},\ 1 \le i \le n-1\}$ et $\Delta^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i < j\}$.

ii. Si $G = Sp(2n)$, $\Pi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1},\ 1 \le i \le n-1\} \cup \{2\varepsilon_n\}$ et $\Delta^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j,\ i < j\} \cup \{2\varepsilon_i, 1 \le i \le n\}$.

iii. Si $G = SO(E_{2n})$, $\Pi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, 1 \le i \le n-1\} \cup \{\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}\}$ et $\Delta^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, i < j\}$.

iv. Si $G = SO(E_{2n+1})$, $\Pi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1},\ 1 \le i \le n-1\} \cup \{\varepsilon_n\}$ et $\Delta^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j,\ i < j\} \cup \{\varepsilon_i,\ 1 \le i \le n\}$.

Remarque 7.46. — Étant donné G et T, il existe plusieurs choix de racines simples. On peut en fait vérifier que W agit simplement transitivement sur l'ensemble des différents choix de racines simples. Dans l'exemple précédent, on s'est contenté de donner le choix le plus naturel.

7.47. Théorie des représentations

Soit G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal et $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Cartan correspondante. Fixons $\Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \subset \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ un choix de racines simples et notons $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^+$ les racines positives associées. Notons W le groupe de Weyl et A le réseau des caractères analytiques entiers. Notons $\mathfrak{n}^+ = \oplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^+} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{n}^- = \oplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^-} \mathfrak{g}_\alpha$. On a donc

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}^+$$

qu'on appelle décomposition triangulaire de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.

Remarque 7.48. — En effet lorsque $G = U_n$ donc $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}}$ et qu'on fait le choix de racines simples donné dans l'exemple 7.45, on retrouve vraiment la décomposition des matrices en triangulaires inférieures, diagonales et triangulaires supérieures.

Définition 7.49. — Soit V une représentation de G de dimension finie de décomposition par les poids $V = \oplus_{\alpha \in \Delta(V)} V_\alpha$. On dit que $v \in V_{\lambda_0}$ est un vecteur de plus haut poids relativement à $\Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ si $\mathfrak{n}^+ v = 0$. On dit alors que λ_0 est un plus haut poids de V.

Remarque 7.50. — La terminologie de « plus haut poids » fait référence à un ordre sur $(i \cdot \mathfrak{t})^*$, appelé ordre de Bruhat et d'origine combinatoire. Cet ordre n'est pas complètement élémentaire.

Définition 7.51. — Notons K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ qu'on restreint à $\mathfrak{t}$ et qu'on étend par dualité à $(i\mathfrak{t})^*$. Un élément $\lambda \in (i\mathfrak{t})^*$ est dominant relativement au choix de $\Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ si $K(\lambda, \alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$.

Exemple 7.52. — Avec les choix de racines simples de l'exemple 7.45, les poids dominants des groupes classiques sont les suivants.

i. Si $G = U_n$ ou SU_n, $C^+ = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varepsilon_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \geq \lambda_{i+1}\}$.

ii. Si $G = Sp(2n)$, $C^+ = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varepsilon_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \geq \lambda_{i+1}\}$.

iii. Si $G = SO(E_{2n})$, $C^+ = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varepsilon_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \geq \lambda_{i+1},\ \lambda_{n-1} \geq |\lambda_n|\}$.

iv. Si $G = SO(E_{2n+1})$, $C^+ = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varepsilon_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \geq \lambda_{i+1},\ \lambda_n \geq 0\}$.

Remarque 7.53. — On prendre garde que lorsque $G = SU_n$ on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \lambda) \cdot \varepsilon_i$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ était le sous-espace de trace nulle dans $\mathbb{C}^n$ donc les formes linéaires ε_i ne forment pas une famille libre, mais vérifient la relation $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0$.

Le théorème suivant classifie complètement toutes les représentations irréductibles des groupes de Lie compacts, et donc grâce à l'astuce de Weyl toutes les représentations irréductibles de dimension finie des groupes et des algèbres de Lie réductives [**S**, th.7.3 et 7.34].

Théorème 7.54. — *Soit G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal et $\Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ un choix de racine simples. Notons C^+ les poids dominants associés, A les caractères analytiques entiers et $A^+ = A \cap C^+ \subset (i\mathfrak{t})^*$. Soit V une représentation irréductible de G.*

i. *V a un unique plus haut poids λ_V.*

ii. *L'espace de poids pour λ_V est de dimension un.*

iii. *On a $\lambda_V \in A^+$.*

iv. *La classe d'isomorphisme de V est déterminée par λ_V.*

v. *L'application $V \mapsto \lambda_V$ induit une bijection entre classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G et A^+. On notera $V(\lambda)$ la représentation irréductible de plus haut poids $\lambda \in A^+$.*

Remarque 7.55. — On peut monter que G/T admet une structure de variété complexe. Étant donné $\lambda \in A^+$ on peut alors construire explicitement V_λ comme espace de fonctions méromorphes sur G/T vérifiant une équation fonctionnelle donnée par λ. L'action de G sur V_λ provient alors de l'action à gauche de G sur G/T. Lorsque $G = SU_2$ on retrouve la description de l'exercice 4.43 avec les polynômes homogènes à deux variables, qui sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = G/T = SU_2/SU_1$.

Exemple 7.56. — Le cas $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est particulièrement stupide : on a $T = G$, $\mathfrak{t} = \mathfrak{g} = \mathbb{R}$, $\mathfrak{t}' = 0$, $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \emptyset$, $A = \mathbb{Z}$. On retrouve que les caractères de G sont paramétrés par $\mathbb{Z}$.

Exemple 7.57. — Ce théorème fournit un algorithme efficace pour montrer qu'une représentation est irréductible : en effet toute représentation V de G est somme directe d'irréductibles et chaque irréductible a un plus haut poids avec espace de poids correspondant de dimension un. Par conséquent si V a un unique plus haut poids avec espace de poids de dimension un, V est nécessairement irréductible.

Prenons $G = SU_2$ et $V = V_m$ donnée dans l'exercice 4.43. Il est évident de vérifier que T agit sur V avec poids $-m \cdot \varepsilon_1, (-m+2) \cdot \varepsilon_1, \cdots, (m-2) \cdot \varepsilon_1, m \cdot \varepsilon_1$, que $m \cdot \varepsilon_1$ est l'unique plus haut poids et que son espace de poids est de dimension un. Cela fournit une autre preuve de l'irréductibilité de V_m.

Exemple 7.58. — Les représentations irréductibles sont paramétrées par

- **i.** Si $G = U_n$, $\{(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n\}$.
- **ii.** Si $G = SU_n$, $\{(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n\}$ modulo $\mathbb{Z}$ plongé diagonalement.
- **iii.** Si $G = SP_{2n}$, $\{(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n\}$.
- **iv.** Si $G = SO(E_{2n})$, $\{(\lambda_1 \geq \cdots \lambda_{n-1} \geq |\lambda_n|) \in \mathbb{Z}^n\}$.
- **v.** Si $G = SO(E_{2n+1})$, $\{(\lambda_1 \geq \cdots \lambda_n \geq 0) \in \mathbb{Z}^n\}$.

Exemple 7.59. — Lorsque $G = U_n$, on a la formule de dualité $V(\lambda)^* = V(\lambda^*)$ où $(\lambda_1 \geq \cdots \lambda_n)^* = (-\lambda_n \geq \cdots \geq -\lambda_1)$. En général, il existe un unique élément $w_0 \in W$ tel que $w \cdot \Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \Delta^-(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ et on a alors $V(\lambda)^* = V(-w_0 \cdot \lambda)$.

Exercice 7.60. — Soit $G = SU_n$. Considérons la représentation sur $\Lambda^p\,\mathbb{C}^n$ obtenue par puissance extérieure p-ième de la représentation standard sur $\mathbb{C}^n$ de base $e_1, \cdots, e_n$. Vérifier qu'une base de vecteurs de poids de $\Lambda^p\,\mathbb{C}^n$ est donnée par les $e_{l_1} \wedge \cdots \wedge e_{l_p}$ et que le poids correspondant est $\sum_{i=1}^p \varepsilon_{l_i}$. En déduire que $e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ est l'unique plus haut poids et que $\Lambda^p\,\mathbb{C}^n$ est irréductible de plus haut poids $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_p$.

Exercice 7.61. — Soit $G = SU_n$. Vérifier que la représentation sur $\mathrm{Sym}^m\,\mathbb{C}^n$ est irréductible de plus haut poids $m \cdot \varepsilon_1$.

7.62. Formule du caractère de Weyl

Pour tout connaître sur les représentations des groupes compacts, il reste à donner une formule pour le caractère $\chi_\lambda : G \to \mathbb{C}$ de V_λ pour tout $\lambda \in A^+$. Cela donnera en particulier leur dimension, puisque cette dernière est égale à $\chi_\lambda(1)$. Cela nous permettra également de terminer la généralisation de la théorie de Fourier aux groupes de Lie compacts non abéliens. Dans toute cette partie on fixe G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal, $\Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \subset \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ un système de racines simples et on utilise les objets A^+, $\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ et W introduits auparavant.

7.62.1. Fonctions qui descendent. — Soit $\lambda \in A$. Il définit donc une forme linéaire $\mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ qui par définition était la dérivée d'un morphisme de groupes $\xi_\lambda : T \to \mathbb{C}^*$. De manière équivalente, λ descend de $\mathfrak{t}$ à T via la surjection $\exp_G : \mathfrak{t} \to T$. Généralisons cette notion à d'autres fonctions $\mathfrak{t} \to \mathbb{C}$.

Définition 7.63. — Soit $f : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit qu'elle descend à T si elle se factorise en $\xi_f : T \to \mathbb{C}$ par $\exp_G : \mathfrak{t} \to T$.

Remarque 7.64. — Rappelons que le groupe de Weyl W agit sur T et sur $\mathfrak{t}$. Alors f est W-invariante si et seulement si ξ_f est W-invariante.

Lemme 7.65. — *La restriction de G à T induit une bijection entre*

i. *Les fonctions de classe $G \to \mathbb{C}$, qui sont invariantes par conjugaison de G.*

ii. *Les fonctions $T \to \mathbb{C}$ qui sont invariantes par W.*

iii. *Les fonctions $\mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ qui sont invariantes par W et descendent à T.*

Démonstration. — Il suffit de montrer la bijection entre les deux premiers ensembles de fonctions. Mais on a vu dans le théorème 7.16 que tout $g \in G$ est conjugué à un élément $t \in T$. La seule ambiguité dans le choix de t réside dans des conjugaisons par des éléments de G qui normalisent T, c'est à dire par des éléments de $N_G(T)$. Mais l'ambiguité se factorise alors par l'action de $W = N_G(T)/T$. Ainsi on trouve bien $G^\sharp = T/W$. □

Remarque 7.66. — En particulier le charactère χ_π de toute représentation irréductible $\pi \in \hat{G}$ définit une fonction $\chi_\pi : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ invariante par W et qui descend à T. Notre but est d'identifier cette fonction lorsque le plus haut poids de π est $\lambda \in A^+$.

7.66.1. Demi-somme des racines positives. — On note $\rho = 1/2 \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^+} \alpha \in (i\mathfrak{t})^*$. Cette quantité va jouer un grand rôle de normalisation dans toutes les formules, et d'une certaine manière remplace l'origine de $(i\mathfrak{t})^*$.

Remarque 7.67. — On préfère désormais changer nos normalisations et considérer des éléments $\mathbb{R}$-linéaires $\mathfrak{t} \to i \cdot \mathbb{R}$. Dans les formules qui suivent, α et ρ seront donc des morphismes à valeurs imaginaires pures sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{t}$.

Exemple 7.68. — On a pour les groupes classiques

i. Si $G = U_n$ ou SU_n, $\rho = \frac{1}{2}\left((n-1) \cdot \varepsilon_1 + (n-3) \cdot \varepsilon_2 + \cdots + (-n+1) \cdot \varepsilon_n\right)$.

ii. Si $G = SP_{2n}$, $\rho = n \cdot \varepsilon_1 + (n-1) \cdot \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$.

iii. Si $G = SO(E_{2n})$, $\rho = n \cdot \varepsilon_1 + (n-1) \cdot \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}$.

iv. Si $G = SO(E_{2n+1})$, $\rho = \frac{1}{2}\left((2n-1)\cdot\varepsilon_1 + (2n-3)\cdot\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n\right)$.

Remarque 7.69. — La forme linéaire $\rho : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ ne descend pas toujours à T (notamment lorsque $G = SO(E_{2n+1})$) car sa forme descendue ferait apparaître des racines carrés qui n'existent pas sur T. Par contre $2\rho = \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^+}\alpha$ descend toujours car c'est le cas de tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ qui est une valeur propre de T agissant par Ad sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Les formules qui vont suivre feront intervenir plusieurs fois la fonction $\rho : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ qui ne descend pas à T, mais des simplifications cachées feront que les expressions totales descendront à T et donneront par exemple χ_π.

7.69.1. Élements réguliers. — Les éléments réguliers généralisent la notion de matrices à valeurs propres toutes distinctes. On en avait déjà vu une variante dans la définition 7.10 pour les éléments de l'algèbre de Lie mais là on considère les éléments du groupe.

Définition 7.70. — On note $T^{reg} \subset T$ l'ouvert dense formé des $t \in T$ tels que $\alpha(t) \neq 1$ pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ que l'on a vu comme un morphisme $T \to \mathbb{C}^*$.

On note $\Xi \subset \mathfrak{t}$ l'image inverse de T^{reg} par $\exp_G : \mathfrak{t} \to T$. On a $\Xi = \{H \in \mathfrak{t} \mid \alpha(H) \notin 2i\pi\mathbb{Z}\ \forall\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$.

Remarque 7.71. — Soit $\mathfrak{t}^{reg} \subset \mathfrak{t}$ l'ensemble des éléments réguliers comme dans la définition 7.10. On a une inclusion $\Xi \subset \mathfrak{t}^{reg}$ qui n'est pas une égalité : pour U_n le sous-ensemble Ξ paramètre les matrices diagonales à valeurs propres toutes distinctes modulo $2i\pi\mathbb{Z}$ alors que $\mathfrak{t}^{reg}$ paramètre les matrices diagonales à valeurs propres toutes distinctes.

Définition 7.72. — On note $\Delta : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ la fonction qui envoie $H \in \mathfrak{t}$ sur

$$\Delta(H) = \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}\left(e^{\frac{\alpha(H)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(H)}{2}}\right).$$

On rappelle que dans notre nouvelle convention $\alpha : \mathfrak{t} \to i\cdot\mathbb{R}$ donc les exponentielles de cette formule sont de module un. La fonction Δ est non nulle sur Ξ et $|\Delta|^2$ descend à T.

Définition 7.73. — Soit $w \in W$.

i. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, on note $w \bullet \lambda = ((w+\rho)\cdot\lambda) - \rho$. Il s'agit d'un décalage d'origine dans l'action usuelle de W sur $\mathfrak{t}^*$.

ii. On note $\varepsilon(w)$ le déterminant de l'action de w sur $\mathfrak{t}$. Lorsque $G = U_n$ ou SU_n, on a $W = \mathfrak{S}_n$ et $\varepsilon(w)$ est la signature de la permutation w.

Le théorème suivant est la formule du charactère de Weyl.

Théorème 7.74. — *Pour tout poids analytique entier dominant $\lambda \in A^+$, soit $V(\lambda)$ la représentation irréductible de G de plus haut poids λ et χ_λ son charactère, que l'on voit* *comme une fonction W-invariante $\mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ par le lemme 7.65. On a*

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(H) &= \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\cdot e^{[w(\lambda+\rho)](H)}}{\Delta(H)} \\ &= \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\cdot e^{(w\bullet\lambda)(H)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})}(1-e^{-\alpha(H)})} \end{aligned}$$

pour tout $H \in \Xi$.

Remarque 7.75. — Ainsi lorsqu'on remplace $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par un groupe compact connexe non abélien G, les fonctions $H \mapsto e^{inH}$ de la théorie de Fourier discrète sont remplacées par des produits, sommes et quotient de fonctions exponentielles, la somme et le produit portant sur les objets combinatoires W et $\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ associés à G.

La fonction $H \mapsto e^{inH}$ est d'ailleurs le résultat donné par la formule du charactère de Weyl pour le groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: on a $\mathfrak{t} = \mathbb{R}$, $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \emptyset$, $W = 1$ donc le dénominateur est 1 et le numérateur est une seule exponentielle.

Exercice 7.76. — Soit $G = SU_2$ et $\lambda = m\cdot\varepsilon_1$ avec $m \geq 0$. Retrouver avec la formule du charactère de Weyl les résultats de l'exercice 4.47.

Le corollaire suivant est appelé formule du dénominateur de Weyl.

Corollaire 7.77. — *On a $\Delta(H) = \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\cdot e^{(w\cdot\rho)(H)}$ pour tout $H \in \mathfrak{t}$.*

Démonstration. — Appliquer la formule du charactère de Weyl à la représentation trivial, c'est à dire à $\lambda = 0$. □

Corollaire 7.78. — *Pour tout $\lambda \in A^+$ et tout $H \in \Xi$, on a $\chi_\lambda = \frac{\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\cdot e^{[w(\lambda+\rho)](H)}}{\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\cdot e^{(w\cdot\rho)(H)}}$.*

Proposition 7.79. — *Soit $\lambda \in A^+$. Notons K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ restreinte à $\mathfrak{t}$. Alors*

$$\dim(V(\lambda)) = \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} \frac{K(\lambda+\rho,\alpha)}{K(\rho,\alpha)} .$$

Démonstration. — On a $\dim(V(\lambda)) = \chi_\lambda(0)$. Malheureusement $0 \notin \Xi \subset \mathfrak{t}$ donc la formule du charactère de Weyl ne s'applique pas directement. Il faut donc passer à la limite lorsque $H \to 0$ dans la formule du charactère [**S**, th.7.32]. □

Exercice 7.80. — Classifier les représentations irréductibles de SU_3 et donner leur dimension.

BIBLIOGRAPHIE

[BD] T. Bröcker et T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics **98**, Springer.

[D] J. F. Dat, *Cours introductif de M2 Groupes et Algèbres de Lie*, note de cours sur internet (2012).

[Ki] A. Kirillov, *An introduction to Lie groups and Lie Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **113**.

[Ko] E. Kowalski, *Representation theory*, note de cours sur internet.

[M] F. Murnaghan, *Representations of locally compact group, Fall 2013*, notes de cours sur internet.

[S] M. Sepanski, *Compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics **235**, Springer.