Benoît Stroh

LE SITE PRO-ÉTALE DES SCHÉMAS, D'APRÈS BHATT-SCHOLZE

Benoît Stroh

Mars 2024

LE SITE PRO-ÉTALE DES SCHÉMAS, D'APRÈS BHATT-SCHOLZE

Benoît Stroh

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Le but de ce cours est double : premièrement une introduction au sujet classique qu'est le site étale, tout en expliquant les insuffisances de cette théorie. La seconde partie sera une introduction au site pro-étale de Bhatt-Scholze et à certains de ses aspects fascinants.

Des variantes de ce site sont aujourd'hui omniprésentes en géométrie arithmétique et se retrouvent dans la cohomologie étale des diamants, dans les travaux de Fargues-Scholze, dans les mathématiques condensées, etc. Mais contrairement aux diamants et aux perfectoïdes qui sont liés aux espace adiques de Huber et aux anneaux de périodes de Fontaine, le site pro-étale des schémas est une construction qui ne demande de connaître que les bases de géométrie algébrique schématique. Une grande partie de ce qu'on étudiera concernera en fait les schémas affines et pourra donc être formulé juste dans le cadre de l'algèbre commutative.

Ainsi le site pro-étale de Bhatt-Scholze permet d'introduire certaines idées très fécondes (et comme on le verra, étranges, menant à un bestiaire peu habituel) tout en minimisant les prérequis.

1.1. Intérêt de la cohomologie étale

Comme vous l'avez vu en cours de Schémas II, les schémas disposent d'une théorie de la cohomologie cohérente, qui est analogue à la cohomologie cohérente des variétés complexes (et la théorie schématique est d'ailleurs beaucoup plus simple que la théorie analytique).

Néanmoins, les variétés complexes disposent d'une autre théorie cohomologique utile, la cohomologie de Betti $H^i(X, \Lambda)$ qui est un Λ-module pour tout anneau Λ. On sait d'ailleurs que pour une variété complexe X, elle rentre dans le cas général de la théorie des faisceaux de l'espace topologique sous-jacent à X puisque

$$H^i(X, \Lambda) = H^i(X, \underline{\Lambda})$$

où $\underline{\Lambda}$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \Lambda$. Il est d'ailleurs défini par la formule

$$\begin{aligned} \underline{\Lambda}(U) &= \mathrm{Cont}(U, \Lambda) \\ &= \mathrm{LocConst}(U, \Lambda) \\ &= \mathrm{Maps}(\pi_0(U), \Lambda) \\ &= \prod_{\pi_0(U)} \Lambda \end{aligned}$$

où Λ est muni de la topologie discrète, Cont désigne les applications continues, LocConst les applications localement constantes, Maps toutes les applications ensemblistes (nous reverrons l'origine de telles formules dans le lemme 1.24).

1.1.1. Le cas de la topologie de Zariski. — Soit maintenant X un schéma. Le premier essai étant donné un anneau Λ serait de considérer le faisceau Zariski $\underline{\Lambda}_{X,Zar}$ qui est le faisceautisé du préfaisceau $U \mapsto \Lambda$ pour tout ouvert Zariski U de X, puis $H^i(X_{\mathrm{Zar}}, \underline{\Lambda}_{X,Zar})$ défini dans le cadre de la cohomologie des faisceaux sur l'espace topologique X muni de sa topologie de Zariski.

Problème 1.2. — Supposons X intègre donc connexe. Alors tout ouvert Zariski $U \subset X$ est intègre, donc connexe. On a donc $\underline{\Lambda}_{X,Zar}(U) = \underline{\Lambda}_{X,Zar}(X)$, et $\underline{\Lambda}_{X,Zar})$ est flasque et $H^i(X_{\mathrm{Zar}}, \underline{\Lambda}_{X,Zar}) = 0$ pour tout $i > 0$.

Remarque 1.3. — L'argument ne marche pas en supposant seulement X connexe : un ouvert peut ne plus être connexe. Considérer en effet $X = V(xy) \subset \mathbb{A}^2_k = \mathrm{Spec}(k[x, y])$ la croix de coordonnées et U le complémentaire de l'origine, qui a deux composantes connexes.

1.4. La notion de site

Grothendieck a trouvé par quoi remplacer la topologie Zariski pour obtenir une théorie ohomologique des schémas qui ressemble à la cohomologie de Betti : il s'agit de la topologie étale, ou plutôt du site étale. Il ne s'agit pas d'une topologie à proprement parler car on ne va pas travailler avec une classe de sous-ensembles de X vérifiant les axiomes d'ouverts, mais avec des applications $Y \to X$ non immersives.

Il faut tout d'abord dégager cette notion formelle de site, ou ce qui est un synonyme de topologie de Grothendieck. En un mot, un site sur X est une classe de schémas $Y \to X$ stable par produits fibrés finis (ce qui généralise le fait qu'une intersection finie d'ouverts est finie) et pour tout tel Y d'une classe de recouvrements $\coprod_{i \in I} Z_i \to Y$ vérifiant des axiomes naturels (en effet comme les Z_i ne sont pas des sous-ensembles de Y, on ne peut pas former le sous-ensemble $\bigcup_{i \in I} Z_i$ de Y puis demander que $Y = \bigcup_{i \in I} Z_i$).

Remarque 1.5. — Pour définir un site relatif à un schéma X, il ne suffit pas de définir les recouvrements de X mais il faut définir les recouvrements de Y pour tout objet $Y \to X$. Cela nous complexifiera la tâche dans la deuxième partie du cours car même si X est raisonnable (de type fini sur un corps ou sur $\mathbb{Z}$, ou noethérien) ce ne sera plus le cas d'un objet $Y \to X$ quelconque du site pro-étale.

On peut alors assez simplement définir la notion de faisceau sur un site, puis la cohomologie de ces faisceaux. On peut de plus faisceautiser les préfaisceaux lorsque le site vérifie une condition de finitude très raisonnable : les classes d'isomorphismes de recouvrements d'un objet donné du site doivent former un ensemble et non pas une classe propre. On obtient alors pour un tel site $\mathcal{S}$ et pour tout anneau Λ un Λ-module $H^i(\mathcal{S}, \Lambda)$.

Remarque 1.6. — On rappelle le paradoxe du barbier, qui veut que la collection des ensembles à bijection près ne forme pas un ensemble mais une classe propre (notion dont le rédacteur ignore la définition....). De même pour la collection des groupes à isomorphisme près, la collection des algèbres à isomorphisme près, la collection des schémas à isomorphismes près, la collection des schémas sur un schéma de base X à isomorphisme de X-schémas près.

Par contre la collection des ensembles finis à bijection près forme un ensemble (en bijection avec $\mathbb{N}$ car pour tout n il existe à bijection près un unique ensemble fini de cardinal n). La collection des groupes finis à isomorphisme près forme un ensemble. Si k est un corps, la collection des k-algèbres de type fini à isomorphisme près forme aussi un ensemble.

Rappelons également que lorsque X est un espace topologique, le faisceautisé $\mathcal{F}^{sh}$ d'un préfaisceau $\mathcal{F}$ est défini par une formule écrivant $\mathcal{F}^{sh}(U)$ comme une colimite de groupes abéliens indexée par l'ensemble $\mathcal{U}$ des recouvrements de U. En effet $\mathcal{U}$ est bien un ensemble et non pas une classe propre car l'ensemble des parties de U est un ensemble.

Une formule similaire pour la faisceautisation est valable pour dans un site quelconque, mais pour qu'elle ait un sens, il faut a priori que pour tout objet Y du site, la collection de ses recouvrements forme un ensemble. *On voit que pour disposer de faisceautisation il sera donc souvent utile étant donné un schéma X de se restreindre à un site formé de $Y \to X$ vérifiant des conditions de finitude.*

Revenons à la cohomologie étale des schémas : il s'agit donc de définir le site étale des schémas. Il faut pour cela d'abord étant donné deux schémas X et Y définir la notion de morphisme étale $Y \to X$, ce que nous ferons dans REF!!!. En un mot il s'agit d'une caractérisation de type différentiel : un morphisme de schémas $Y \to X$ est étale lorsqu'il vérifie des hypothèses analogues au théorème d'inversion locale en géométrie différentielle. Cela explique d'ailleurs pouquoi le mot « étale » n'apparaît pas en géométrie différentielle ou en géométrie complexe : le théorème d'inversion locale vaut dans ces contextes, et les morphismes étales sont simplement les isomorphismes locaux. De plus les morphismes

étales sont localement de présentation finie par définition, ce qui permet de définir la faisceautisation car pour tout X, la collection de $Y \to X$ étales à isomorphisme de X-schémas près forme un ensemble. On peut donc définir le faisceau $\underline{\Lambda}$ sur le site étale comme le faisceautisé du préfaisceau $U \mapsto \Lambda$.

À ce point, on a défini un Λ-module $H^i(X_{et}, \underline{\Lambda})$ pour tout schéma X et tout anneau Λ. Il reste bien sûr à contrôler ce Λ-module pour affirmer que $H^i(X_{et}, \underline{\Lambda})$ est une généralisation raisonnable de la cohomologie de Betti d'une variété complexe. Sans exhaustivité, on aimerait par exemple que

i. pour tout schéma $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ lisse, on dispose d'un isomorphisme canonique de Λ-modules $H^i(X_{et}, \underline{\Lambda}) = H^i(X(\mathbb{C}), \underline{\Lambda})$ pour tout $i \geq 0$, où $X(\mathbb{C})$ est muni de sa topologie de variété complexe et la deuxième cohomologie est la cohomologie de Betti.

ii. pour toute courbe propre lisse connexe $X \to \mathrm{Spec}(k)$ de genre g avec k algébriquement clos, on ait un isomorphisme non canonique $H^1(X_{et}, \underline{\Lambda}) \simeq \Lambda^{2g}$.

iii. et que $H^i(X_{et}, \underline{\Lambda})$ soit fonctoriel en X pour tout $i \geq 0$.

Remarque 1.7. — Les axiomes à vérifier sur $H^i(X_{et}, \bullet)$ sont bien sûr beaucoup plus nombreux que la courte liste précédente : annulation si $i >> 0$ lorsque X vérifie des conditions raisonnables, finitude lorsque X et le faisceau vérifient des conditions raisonnables, etc etc.

On se heurte à ce stade à deux problèmes : le premier est une observation due à Serre qui n'est pas propre à la cohomologie étale. Si p est premier et $E \to \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ est une courbe elliptique, si on imagine qu'il existe une théorie cohomologique $H^1(E, \Lambda)$ qui soit fonctorielle en E et qui fournisse un Λ-module libre de rang 2, on aurait alors une action de $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{F}}_p}(E)$ sur $H^1(E, \Lambda)$ d'où après un choix de base un morphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres

$$\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{F}}_p}(E) \to \mathrm{Mat}_2(\Lambda)$$

donc un morphisme de Λ-algèbres

$$\Phi_\Lambda : \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{F}}_p}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda \to \mathrm{Mat}_2(\Lambda)\,.$$

On rappelle que si E est ordinaire, $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{F}}_p}(E) = \mathbb{Z}$ et il n'y a aucune contradiction. Mais si E est supersingulière, $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{F}}_p}(E)$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre qui est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 4, ordre d'une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ ramifiée en p et ∞. Si $\Lambda = \mathbb{Z}$ alors $\Phi_{\mathbb{Q}} = \Phi_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ serait une morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres d'une algèbre centrale simple de rang 4 sur $\mathbb{Q}$ vers $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$. Il serait injectif par simplicité de la source, et bijectif par le théorème du rang. Mais cela contredit le fait que $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{F}}_p}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est ramifiée en p et en ∞. Il ne peut donc pas exister de telle théorie cohomologique lorsque $\Lambda = \mathbb{Z}$!

Le même argument marche aussi lorsque $\Lambda = \mathbb{Q}$ ou $\Lambda = \mathbb{F}_p$ ou $\Lambda = \mathbb{R}$ (car ni $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{F}}_p}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ ni $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{F}}_p}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ne sont isomorphes à une algèbre de matrices). Par contre l'obstruction disparaît lorsque $\Lambda = \mathbb{F}_l, \mathbb{Z}/l^n, \mathbb{Z}_l, \mathbb{Q}_l, \mathbb{C}, \bar{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Z}_p^{nr}, \mathbb{Q}_p^{nr}$ pour tout premier $l \neq p$ et tout $n \geq 1$.

Mais le fait que l'obstruction dégagée par Serre disparaît pour ces choix de Λ ne veut pas dire que $H^1(E_{et}, \underline{\Lambda})$ vérifie les axiomes souhaités, en particulier la liberté de rang 2 comme Λ-module.

Problème 1.8. — Soit X un schéma normal de type fini sur un corps algébriquement clos. Alors pour tout faisceau $\mathcal{F}$ en groupes abéliens sur le site étale de X et pour tout $i \geq 0$ on a que $H^i(X_{et}, \mathcal{F})$ est un $\mathbb{Z}$-module de torsion (Freitag-Kiehl, Etale cohomology, p.118). Une variante montre que pour tout schéma noethérien intègre normal, on a $H^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$ (`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~david.harari/enseignement/m2brauer23/etalbrauer.pdf` par.4.1).

Ainsi quelle que soit la caractéristique de k, lorsque X est une courbe propre lisse connexe de genre g sur k, on ne peut pas avoir $H^1(X_{et}, \underline{\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$. Et si $\mathcal{F} = \underline{\mathbb{Q}}$, on en déduit que $H^1(X_{et}, \underline{\mathbb{Q}})$ est un $\mathbb{Z}$-module de torsion qui est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel donc qu'il est nul.

De même si $\mathcal{F} = \underline{\mathbb{C}}$, $\underline{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Z}_\ell$, $\mathbb{Q}_\ell$, $\mathbb{Z}_p^{nr}$, $\mathbb{Q}_p^{nr}$ si p est la caractéristique de k. Dans tous ces cas $H^1(X_{et}, \mathcal{F})$ sera de torsion (et nul si les coefficients sont un corps) donc jamais libre de rang deux sur l'anneau de coefficients. Notamment on voit que la cohomologie étale de $\underline{\mathbb{Z}_\ell}$ n'est pas l'objet qu'on veut considérer.

Il paraît donc logique de se restreindre aux coefficients finis (ou plus généralement de torsion) pour espérer contrôler $H^i(X_{et}, \underline{\Lambda})$. C'est en effet ce qui est fait dans SGA 4, avec la restriction additionnelle que le cardinal de Λ soit premier aux caractéristiques des corps résiduels des points de X (ou plus généralement que Λ soit de torsion première aux caractéristique des corps résiduels)

Problème 1.9. — Reprenons le cas où E est une courbe elliptique sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. La théorie d'Artin-Schreier permet alors de calculer $H^1(E_{et}, \bar{\mathbb{F}}_p)$ et on trouve $\bar{\mathbb{F}}_p$ si E est ordinaire et 0 si E est supersingulière. Le résultat n'est donc jamais libre de rang 2. Il ne suffit donc pas d'avoir des coefficients de torsion pour que $H^i(X_{et}, \underline{\Lambda})$ soit convenable. En fait lorsque X est propre sur un corps algébriquement clos de caractéristique p, la bonne théorie cohomologique à coefficients $\bar{\mathbb{F}}_p$ est la cohomologie cristalline, et non pas la cohomologie étale.

Commencent alors les 870 pages de SGA 4, 190 pages de SGA 4.5 et 496 pages de SGA 5 pour contrôler $H^i(X, \underline{\Lambda})$ lorsque Λ est un anneau fini de cardinal premier aux caractéristiques des points de X.... On ne dira rien sur cela dans ce cours. Ainsi on étudiera la topologie étale mais pas la cohomologie étale. On dispose ainsi du théorème suivant.

Théorème 1.10. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique première à un nombre premier ℓ et $X \to \mathrm{Spec}(k)$ une courbe propre lisse connexe de genre g. Pour tout $n \geq 1$, on dispose d'un isomorphisme non canonique $H^1(X_{et}, \underline{\mathbb{Z}/\ell}) \simeq (\mathbb{Z}/\ell^n)^{2g}$.*

Néanmoins pour les applications, notamment au comptage du nombre de points des variétés sur les corps finis et les conjectures de Weil, il reste désirable de disposer d'une théorie cohomologique à valeurs dans les $\mathbb{Z}_\ell$-modules pour tout nombre premier ℓ distinct des caractéristiques des points de X. On est amené à poser pour tout $i \geq 0$

$$H^i(X_{et}, \mathbb{Z}_\ell) = \lim_n H^i(X_{et}, \underline{\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}})$$

ce qui a l'avantage de réduire le contrôle de $H^i(X_{et}, \mathbb{Z}_\ell)$ à celui de $H^i(X_{et}, \underline{\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}})$ pour tout n, qui est redevable de SGA. On voit notamment que lorsque X est une courbe propre lisse connexe de genre g sur un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq \ell$, on dispose en effet d'un isomorphisme non canonique $H^i(X_{et}, \mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{2g}$ ce qui montre d'ailleurs que $H^1(X_{et}, \mathbb{Z}_\ell) \neq H^1(X_{et}, \underline{\mathbb{Z}_\ell})$ puisque ce dernier groupe est de torsion.

Mais une définition aussi naïve de la cohomologie étale à coefficients $\mathbb{Z}_\ell$ pose problème dans des cadres plus compliqués et néanmoins indispensables : cas du complexe $R\Gamma(X, \mathbb{Z}_l)$ dans la catégorie dérivée, cas de la cohomologie relative Rf_*, etc. Jouanoulou, Deligne puis Ekedhal ont trouvé des définitions toujours indirectes et se ramenant au cas de torsion. Des hypothèses de finititude de la cohomologie étale sont de plus nécessaires dans les travaux de ces auteurs, et ces hypothèses ne s'appliquent pas si X est un schéma de type fini sur $\mathbb{Q}$ ou sur $\mathbb{R}$! Il reste donc souhaitable de définir $H^i(X_{et}, \mathbb{Z}_\ell)$ comme la cohomologie d'un faisceau sur un site, si possible sans hypothèse de finitude. Or on a vu que le site étale ne convient pas car le résultat est de torsion si X est normal de type fini sur un corps algébriquement clos.

C'est exactement cette problématique que vous résoudre Bhatt et Scholze grâce au site pro-étale.

1.11. La topologie pro-étale

Dans cette introduction nous serons très brefs concernant la topologie pro-étale, et nous référons au corps du texte pour les définitions rigoureuses. Disons simplement que lorsque $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, un morphisme pro-étale $Y \to X$ est comme son nom l'indique une limite projective de schémas de schémas affines et étales sur X. Il s'agit donc du spectre d'une algèbre ind-étale, limite inductive (ie colimite) d'algèbres étales sur A. Dans le cas où X n'est pas affine, on préfère la notion de morphisme faiblement étale sur X.

Mais pourquoi un tel site n'a-t-il pas été introduit avant ? Parce qu'une A-algèbre ind-étale n'est pas de type fini sur A. Donc la collection des classes d'isomorphismes de A-algèbres ind-étales ne forme pas un ensemble. Cela exclut a priori l'existence d'une faisceautisation des préfaisceaux sur le site pro-étale.

Étant donné une inclusion de faisceaux $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ sur le site pro-étale, il n'est donc pas clair qu'il existe un faisceau quotient $\mathcal{G}/\mathcal{F}$, car cela devrait être le faisceautisé du préfaisceau quotient. De même il n'est pas clair qu'il existe des conoyaux de morphismes de faisceaux

pro-étales. Donc il n'est pas évident que la catégorie des faisceaux pro-étales est abélienne. Si ce n'était pas le cas, le formalisme cohomologique s'effondrerait !

Remarque 1.12. — Une telle source de problème était connue depuis SGA : à l'époque étaient étudiées non seulement la topologie étale mais aussi la topologie fppf (fidèlement plate de présentation finie) et la topologie fpqc (fidèlement plate quasi compacte). L'hypothèse de présentation finie dans le site fppf garantit que les recouvrements à isomorphisme près de X fixé forment un ensemble, et qu'il y a une opération de faisceautisation, et donc une bonne théorie cohomologique.

Mais dans le site fpqc, l'absence de toute hypothèse de finitude exclut que les classes d'isomorphismes de recouvrements forme un ensemble. Tout s'effondre et on ne peut pas parler de cohomologie fpqc.

Or il s'avère que les recouvrements pro-étales sont des recouvrmeents fpqc mais pas fppf. Ils ne satisfont aucune hypothèse de finitude raisonnable

C'est le théorème suivant qui va permettre de s'affranchir de ces problèmes potentiellement fatals de théorie des ensembles.

Théorème 1.13. — *Soit X un schéma. Il existe un recouvrement pro-étale $X' \to X$ telle que tous les recouvrements pro-étales $X'' \to X'$ scindent. Ainsi X' vérifie la propriété que pour tout recouvrement pro-étale $\coprod_{i\in I} U_i \to X'$, il existe pour tout $i \in I$ un ouvert $V_i \subset U_i$ tel que $X = \coprod_{i\in I} V_i$. (REF ! ! ! !)*

On montrera l'utilisation de tels X' permet facilement de définir le faisceautisé d'un préfaisceau sur X, ce qui résoud les problèmes précédents !

Remarque 1.14. — La propriété que tout recouvrement Zariski de X' scinde est déjà extrêmement surprenante : les seuls X' faciles à trouver vérifiant cette propriété sont les schémas ayant un unique point fermé, comme les spectres de corps ou d'anneaux locaux. Etant donné $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ou $X = \mathbb{A}^1_k$, il n'est pas du tout évident de trouver un recouvrement fpqc $X' \to X$ tel que les recouvrements Zariski de X' scindent.

Nous tenterons dans la première partie du cours de construire quelques candidats naïfs pour de tels X', et cela ne fonctionnera pas. Nous verrons une construction générale dans la seconde partie du cours sur le site pro-étale.

Remarque 1.15. — Dans le cadre topologique, si $X = \mathbb{R}$ ou $X = [0, 1]$, il n'est pas du tout évident de trouver des recouvrements $X' \to X$ (pour une topologie de Grothendieck à préciser) tels que X' vérifie la propriété que tout recouvrement scinde. Nous reverrons un tel exemple en REF ! ! ! !

Remarque 1.16. — Nous voyons apparaître ici un autre aspect du site pro-étale : même si on est intéressé par l'étude de $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ou $X = \mathbb{A}^1_k$ on est amené à introduire un

recouvrement pro-étale $X' \to X$ avec X comme dans le théorème 1.13. Et X' ne sera pas un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ ou sur k. Ce ne sera même pas un schéma noethérien. De plus conformément à la remarque 1.5 il faudra étudier les schémas pro-étales sur X'. On ne peut donc même pas se restreindre à étudier des morphismes de schémas dont le but est noethérien.

On peut donc prendre la topologie pro-étale comme source de nombreux exemples de schémas non noethériens, et cela est une motivation pour avoir développé la théorie des schémas sans hypothèse de noethérianité. Nous tenterons de faire attention à cela dès la première partie du cours, en développant le formalisme étale sans aucune hypothèse sur la base.

Remarque 1.17. — Le théorème fondamental 1.13 ne servira pas seulement à s'affranchir de problèmes de théorie des ensembles peut être abscons, mais est au contraire omniprésent dans toute la théorie du site pro-étale. Nous définirons par exemple le faisceau $\underline{\mathbb{Z}}_\ell$ comme limite projective des $\underline{\mathbb{Z}/\ell^n}$ dans la catégorie des faisceaux pro-étales. Le fait que $H^i(X_{proet}, \underline{\mathbb{Z}}_\ell) = \lim_n H^i(X_{proet}, \underline{\mathbb{Z}/\ell^n})$ n'est alors pas du tout formel, et repose encore sur le théorème 1.13.

1.18. Faisceaux de fonctions continues

Pour que la théorie soit intéressante, il reste à construire des exemples naturels de faisceaux pro-étales. Une construction générale va consister en des faisceaux de fonctions continues à valeurs dans des espaces topologiques, et cela marche sans supposer que X soit un schéma. Nous allons donc commencer par regarder des cas élémentaires où X est une variété différentielle.

Mais d'abord quelques rappels de topologie générale `https://stacks.math.columbia.edu/tag/004R`. Pour tout espace topologique X un sous-ensemble $Z \subset X$ est connexe s'il ne peut pas s'écrire $Z = U_1 \coprod U_2$ avec $U_1, U_2 \subset Z$ ouverts non vides pour la topologie induite. Une composante connexe de X est alors un sous-ensemble connexe maximal pour l'inclusion. On montre facilement que toute composante connexe est fermée et que X est partionné par ses composantes connexes. Donc la relation $x \sim y$ si et seulement si x et y sont dans la même composante connexe est une relation d'équivalence sur X. On introduit le quotient $\pi_0(X) = X/\sim$ et on le muni de la topologie quotient par la surjection canonique $\pi : X \to \pi_0(X)$. Donc $\pi_0(X)$ est un espace topologique tel qu'un sous-ensemble $V \subset \pi_0(X)$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(V) \subset X$ est ouvert. De manière équivalente, pour tout espace topologique Y et toute application ensembliste $f : \pi_0(X) \to Y$, on a que f est continue si et seulement si $f \circ \pi$ est continue.

L'espace $\pi_0(X)$ a la topologie discrète si et seulement si les composantes connexes de X sont ouvertes. C'est automatiquement le cas si $\pi_0(X)$ est fini, puisque ses composantes sont

toujours fermées et qu'une union finie de fermés est fermée. Remarquons qu'en général les points de $\pi_0(X)$ sont fermés, ie $\pi_0(X)$ est un espace topologique vérifiant l'axiome de séparation T_1.

On dit qu'un espace topologique X est localement connexe si tout point $x \in X$ admet une base de voisinages connexes. D'après `https://proofwiki.org/wiki/Equivalence_of_Definitions_of_Locally_Connected_Space` les espaces localement connexes sont exactement les espaces dont pour tout ouvert $U \subset X$, les composantes connexes de U sont ouvertes. Ce sont donc exactement les espaces tels que $\pi_0(U)$ a la topologie discrète pour tout ouvert $U \subset X$.

L'image d'un connexe par une application continue est connexe, donc la formation de $\pi_0(\bullet)$ est fonctorielle : toute application continue $f : X \to Y$ fournit une application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ qui est continue par définition de la topologie quotient.

Il est donc clair que $\mathbb{R}^n$ ou toute variété différentielle est localement connexe. Cela explique que dans ce cas on ne prend jamais la peine de spécifier la topologie sur $\pi_0(X)$, puisque sa topologie naturelle est discrète.

Remarque 1.19. — On peut en effet tester que même pour des ouverts $U \subset \mathbb{R}$ « sauvages », l'espace topologique $\pi_0(U)$ est discret. Essayer par exemple de prendre pour U le complémentaire de l'espace de Cantor, qui est fermé dans $\mathbb{R}$. On trouve $\pi_0(U) = \mathbb{N}$.

Un cas opposé est celui des espaces complètement discontinus, qui sont les espaces topologiques X dont les composantes connexes sont les points. La relation d'équivalence $\sim$ est donc triviale et $X = \pi_0(X)$ comme espace topologique. Mais X n'a pas nécessairement la topologie discrète ! Par exemple prendre $X = \mathbb{Z}_\ell$ muni de la topologie ℓ-adique, ou plus généralement un ensemble pro-fini.

Il est d'ailleurs clair que pour tout espace topologique X, l'espace topologique $\pi_0(X)$ est totalement discontinu, ce qui implique à nouveau que $\pi_0(X)$ est séparé T_0. On peut d'ailleurs dégager la propriété universelle de $\pi_X \to \pi_0(X)$: c'est l'application continue telle que pour tout espace topologique totalement discontinu Y et toute application continue $f : X \to Y$, il existe une unique application continue $\bar{f} : \pi_0(X) \to Y$ factorisant f.

Exercice 1.20. — Quels sont exactement les espaces topologiques Y tels qu'il existe un espace topologique X et un homéomorphisme $Y \simeq \pi_0(X)$?

Passons maintenant à des constructions élémentaires de faisceaux de fonctions continues.

Lemme 1.21. — *Soient X et T deux espaces topologiques. Posons $\mathcal{F}_T(U) = \mathrm{Cont}(U, T)$ pour tout ouvert $U \subset X$.*

i. *Le préfaisceau $\mathcal{F}_T$ est un faisceau sur X.*

ii. *On a $\mathcal{F}_T(U) = \mathrm{Cont}(\pi_0(U), T)$ si T est totalement discontinu.*

iii. *Le faisceau $\mathcal{F}_T$ est le faisceautisé du préfaisceau $U \mapsto T$ si T est discret. On dira que c'est le faisceau constant sur X de valeur T.*

Démonstration. — La règle $U \mapsto \mathrm{Cont}(U,T)$ définit bien un faisceau sur X, puisque la notion de fonction continue est locale à la source.

En écrivant $T = \pi_0(T)$ lorsque T est totalement discontinu, et en utilisant la fonctorialité de π_0, on trouve bien que $\mathrm{Cont}(U,T) = \mathrm{Cont}(\pi_0(U),T)$ lorsque T est totalement discontinu.

Supposons T discret et notons $\mathcal{G}$ le préfaisceau constant de valeur T, défini par $\mathcal{G}(U) = T$ pour tout $U \subset X$. On a un morphisme de préfaisceau $i : \mathcal{G} \to \mathcal{F}_T$ puisque une fonction constante de valeur $t \in T$ est continue. On veut montrer que i identifie $\mathcal{F}_T$ au faisceautisé de $\mathcal{G}$. Il suffit pour cela de prouver que i_x est un isomorphisme au niveau des germes pour tout $x \in X$. Mais $\mathcal{G}_x = T$ et $\mathcal{F}_{T,x} = \mathrm{colim}_{x\in U\subset X}\mathcal{F}_T(U) = \mathrm{colim}_{x\in U\subset X}\mathrm{Cont}(U,T) = T$ où seule la dernière égalité est à justifier (et utilise la discrétude de T). L'application $\mathrm{colim}_{x\in U\subset X}\mathrm{Cont}(U,T) \to T$ est donnée par l'évaluation en x et le candidat pour la réciproque $T \to \mathrm{colim}_{x\in U\subset X}\mathrm{Cont}(U,T)$ est donné par la fonction constante de valeur $t \in T$. Il faut donc vérifier que pour tout $x \in U \subset X$ et toute $f : U \to T$ continue, pour $x \in V \subset U$ ouvert assez petit, f est constante égale à $f(x)$. Mais c'est évident car $f^{-1}(f(x))$ est ouvert dans X par discrétude de T. □

Remarque 1.22. — Ainsi on parle du faisceau constant associé à tout ensemble T, qu'on voit comme espace topologique muni de la topologie discrète. On prendra garde qu'on ne l'appelle pas « faisceau des fonctions localement constantes ». En effet si $\pi_0(U)$ n'est pas discret pour $U \subset X$, on n'a pas $\mathrm{Cont}(\pi_0(U),T) = \mathrm{Maps}(\pi_0(U),T)$, et ce même si T est fini. Donc une fonction continue $f : U \to T$ (qui se factorise en une fonction continue $\pi_0(U) \to T$) n'est pas constante sur un ouvert de X (ce qui est logique car les composantes connexes ne sont pas ouvertes) et ne mérite pas le nom de « localement constante ».

Remarque 1.23. — Si on muni l'espace topologique X d'une topologie de Grothendieck (définition à venir), c'est à dire qu'on introduit une classe d'espaces topologiques munis d'applications continues $f : Y \to X$ et une classe de « recouvrements », la règle $\mathcal{F}_T(Y) = \mathrm{Cont}(Y,T)$ ne définit pas nécessairement un faisceau sur X. Il est facile de vérifier que c'est le cas si les recouvrements $f : Y \to X$ sont des applications quotients ie lorsque $f^{-1}(U) \subset Y$ est ouvert si et seulement si $U \subset X$ est ouvert.

Corollaire 1.24. — *Soit X localement connexe et T totalement discontinu. On a les égalités $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T_{\mathrm{disc}}} = \underline{T}$ entre faisceaux sur X.*

Démonstration. — On utilise le lemme 1.21 et donc $\mathcal{F}_T(U) = \mathrm{Cont}(\pi_0(U),T) = \mathrm{Map}(\pi_0(U),T) = \mathrm{Cont}(\pi_0(U),T_{\mathrm{disc}}) = \mathcal{F}_{T_{\mathrm{disc}}}(U)$ par discrétude de $\pi_0(U)$ (ainsi on utilise la propriété universelle de la topologie discrète qui est adjoint à gauche du foncteur d'oubli des espaces topologiques vers les ensembles). □

Remarque 1.25. — Ainsi lorsque X est localement connexe et T totalement discontinu, une incompatibilité de topologies entre X et T force toute fonction continue $U \to T$ a être localement constante, ie constante sur un connexe ouvert. Cela explique que notre discussion sur les éventuelles différences entre $\mathcal{F}_T$ et $\mathcal{F}_{T_{\text{disc}}} = \underline{T}$ s'effondre dans ce cas usuel.

Passons à présent à quelques exemples dans lesquels ℓ désigne un nombre premier.

i. Soit X une variété différentielle et $T = \mathbb{R}$ muni de sa topologie canonique. Le faisceau $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est le faisceau des fonctions continues à valeurs réelles. Il est fin donc n'est pas intéressant d'un point de vue cohomologique (REF ! !).

ii. Soit X une variété différentielle et $T = \mathbb{R}_{\text{disc}}$ muni de la topologie discrète. Le faisceau $\mathcal{F}_{\mathbb{R}_{\text{disc}}}$ est le faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}$ d'après le lemme 1.21. Il est utilisé en cohomologie de Betti, et $\mathcal{F}_{\mathbb{R}_{\text{disc}}}(U) = \text{Map}(\pi_0(U), \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\pi_0(U)}$ par locale connexité de X.

iii. Si X est un espace topologique, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}_{\text{disc}}}$ est le faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}$. On a $\mathcal{F}_{\mathbb{R}_{\text{disc}}}(U) = \text{Cont}(\pi_0(U), \mathbb{R}_{\text{disc}})$ qui n'est égal à $\text{Map}(\pi_0(U), \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\pi_0(U)}$ que si $\pi_0(U)$ est discret ie U est localement connexe. Prendre $X = \mathbb{Z}_\ell$ comme contre-exemple.

iv. Soit X une variété différentielle (ou plus généralement un espace localement connexe) et munissons $\mathbb{Z}_\ell$ de sa topologie ℓ-adique pour laquelle c'est un ensemble profini, donc compact et totalement discontinu. Pour tout ouvert $U \subset X$, on a $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}(U) = \text{Cont}(\pi_0(U), \mathbb{Z}_\ell)$. Mais comme U est localement connexe, on a $\text{Cont}(\pi_0(U), \mathbb{Z}_\ell) = \text{Maps}(\pi_0(U), \mathbb{Z}_\ell) = \text{Cont}(\pi_0(U), \mathbb{Z}_{\ell,\text{disc}})$ par le corollaire 1.24. Bref dans ce cas $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell} = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\text{disc}}} = \underline{\mathbb{Z}_\ell}$! *Nous sommes donc dans un cas où l'incompatibilité entre la topologie discrète de $\pi_0(U)$ et la topologie totalement discontinue de $\mathbb{Z}_\ell$ rend le faisceau de fonctions continues égal au faisceau constant.*

Avant de passer à des exemples mettant en jeu les schémas, nous avons besoin de vocabulaire qui sera précisé dans le cours du cours (REF). On dit qu'un schéma X est localement noethérien s'il peut être recouvert par des schémas affines qui sont spectres d'anneaux noethériens. On dit que X est noethérien si on peut de plus choisir ce recouvrement fini.

Par exemple tout schéma de type fini sur le spectre d'un anneau noethérien sera noethérien. Ainsi quasiment tous les schémas qu'on veut étudier « dans la vie de tous les jours » sont noethériens ou localement noethériens. D'après le lemme 5.9.6 de `https://stacks.math.columbia.edu/tag/0050`, tout schéma localement noethérien a un espace topologique sous-jacent localement connexe, et donc $\pi_0(U)$ est discret pour tout ouvert $U \subset X$. On peut même affirmer que $\pi_0(U)$ est fini pour tout ouvert $U \subset X$ lorsque X est noethérien.

De plus la classe des schémas localement noethériens est stable par morphismes étales quasiment par définition (REF). Ainsi si X est localement noethérien et $Y \to X$ est étale, alors Y reste localement noethérien. On peut remarquer que si X est noethérien, ce n'est

pas nécessairement le cas de Y car pour que la théorie fonctionne, on doit autoriser la stabilité des morphismes étales par coproduits quelconques, de la même manière qu'une union quelconque d'ouverts est ouvert en topologie. On a donc que $Y = \coprod_{\mathbb{N}} X$ est étale sur X, mais n'est que localement noethérien si X est noethérien.

On définit aussi la notion de schéma qcqs (REF), cela voulant dire quasi-compact quasi-séparé. Les schémas affines sont qcqs, donc tout schéma est localement qcqs. Lorsqu'on veut définir un faisceau sur X, même pour une topologie de Grothendieck, on peut donc se restreindre à le définir sur des $Y \to X$ qui sont qcqs. On voit donc l'hypothèse qcqs comme quelque chose d'assez inoffensif dans cette discussion. D'après le lemme 5.23.9 `https://stacks.math.columbia.edu/tag/08YF`, tout schéma qcqs Y vérifie que $\pi_0(Y)$ est un ensemble profini, c'est à dire `https://stacks.math.columbia.edu/tag/08ZW` séparé T_2 (ie Haussdorf), compact et totalement discontinu.

Le fait que $\pi_0(X)$ est discret lorsque X est localement noethérien et que $\pi_0(X)$ est profini lorsque X est qcqs est compatible avec le fait que $\pi_0(X)$ est fini lorsque X est noethérien. En effet, noethérien est équivalent à localement noethérien et qcqs (REF).

Remarque 1.26. — Si X est qcqs et $U \subset X$ est ouvert, il est faux que U soit qcqs (EXEMPLE REF). Alors que si X est localement (localement) noethérien, tout ouvert reste (localement) noethérien. Cela explique des formulations différentes dans notre liste d'exemples à venir, selon les hypothèses qcqs ou localement noethérien.

Venons-en à notre liste d'exemples en ce qui concerne les schémas.

i. Soit X schéma localement noethérien. Alors X est localement connexe, ie $\pi_0(U)$ est discret pour tout ouvert $U \subset X$ donc $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell} = \underline{\mathbb{Z}}_\ell = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}$ par le corollaire 1.24.

ii. Soit X un schéma localement noethérien. On le munit de la topologie de Grothendieck étale et on considère donc des morphismes $f : Y \to X$ étales sur lesquels on va évaluer les faisceaux. Posons donc $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}(Y) = \mathrm{Cont}(Y, \mathbb{Z}_\ell)$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}(Y) = \mathrm{Cont}(Y, \mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}})$. Il faut vérifier que cela définit deux faisceaux, ce qui résultera du fait que les applications étales sont ouvertes (REF). *Un point clé est que, comme on l'a plus haut, un schéma étale sur un schéma localement noethérien reste localement noethérien.* Donc $\pi_0(Y)$ est discret pour tout Y étale sur X. On a donc $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}(Y) = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}(Y)$ par le corollaire 1.24. On a donc une égalité de faisceaux $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell} = \underline{\mathbb{Z}}_\ell = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}$ sur le site étale de X.

iii. Soit X un schéma et $U \subset X$ un ouvert qcqs. Alors $\pi_0(U)$ est un espace topologique profini et on a une inclusion

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}(U) = \mathrm{Cont}(\pi_0(U), \mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}) \subset \mathrm{Cont}(\pi_0(U), \mathbb{Z}_\ell) = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}(U)$$

qui est a priori stricte si $\pi_0(U)$ n'est pas fini. Par exemple si $\pi_0(U) = \mathbb{Z}_\ell$, l'identité est un élément de $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}(U)$ qui n'est pas dans $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}(X)$.

iv. Soit X un schéma. On le munit de la topologie de Grothendieck pro-étale et on considère donc des morphismes $U \to X$ pro-étales sur lesquels on va évaluer les faisceaux. Posons donc $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}(Y) = \mathrm{Cont}(Y, \mathbb{Z}_\ell)$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}(Y) = \mathrm{Cont}(Y, \mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}})$. Il faut vérifier que cela définit deux faisceaux, ce qui n'est pas évident et résultera du fait que les applications pro-étales surjectives sont des applications quotient (voir le livre Neron Models, prop.5 p.52)(voir la remarque 1.23). Les schémas Y qui sont de plus qcqs engendrent la topologie de Grothendieck, et tout faisceau pro-étale est déterminé par sa valeur sur de tels Y. Pour Y qcqs on a une inclusion a priori stricte

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}(Y) = \mathrm{Cont}(\pi_0(Y), \mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}) \subset \mathrm{Cont}(\pi_0(Y), \mathbb{Z}_\ell) = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}$$

Remarque 1.27. — La morale qui se dégage est très claire : si X est un schéma usuel, c'est à dire noethérien, on peut introduire si l'on veut le faisceau $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}$ des fonctions continues à valeurs ℓ-adiques sur le site étale de X. Mais les schémas étales sur X restent localement noethériens et on a $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell} = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}$. Il n'y a donc aucun gain à introduire le faisceau des applications continues vers $\mathbb{Z}_\ell$.

Mais la topologie pro-étale conduit à introduire des schémas hautement noethériens, même si le schéma de base est noethérien. Par exemple les schémas fournis par le théorème 1.13 sont hautement non noethériens, et on rappelle qu'ils sont indispensables pour contrôler le site pro-étale. Ces schémas auxiliaires vont avoir un π_0 profini non fini. Ainsi on a toujours une inclusion stricte $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}} \subset \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}$ comme faisceaux pro-étales. On verra dans la fin du cours (REF) que la cohomologie ℓ-adique cherchée est en fait $H^i(X_{proet}, \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell})$.

Par opposition on montrera que

$$\begin{aligned} H^i(X_{proet}, \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell,\mathrm{disc}}) &= H^i(X_{et}, \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell,\mathrm{disc}}) \\ &= H^i(X_{et}, \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}) \\ &= H^i(X_{et}, \underline{\mathbb{Z}}_\ell) \end{aligned}$$

qui est redevable de tous les problèmes expliqués dans la partie 1.1. Ainsi le site pro-étale vise à « amener de la topologie au niveau des faisceaux », ce qu'on pouvait tenter de faire au niveau du site étale mais ne donnait rien de neuf.

Lorsqu'on parlera du lien avec les mathématiques condensées (REF) cela deviendra encore plus clair car on se rendra compte que les fibres des faisceaux pro-étales définissent naturellement des espaces topologiques. Et de plus la cohomologie d'un faisceau pro-étale en groupe abéliens définira un groupe abélien topologique.

Alors que les fibres des faisceaux étales sont juste des ensembles. Et la cohomologie étale d'un faisceau en groupe abélien est juste un groupe abélien : la théorie étale se marie mal avec avec la topologie des coefficients, ou mieux n'associe des faisceaux qu'à des espaces topologiques discrets, pour produire des groupes de cohomologie qui sont munis de la topologie discrète. C'est en ce sens que le site pro-étale de Bhatt-Scholze est beaucoup plus

fondamental qu'un simple gadget technique permettant de définir joliment la cohomologie ℓ-adique.

Exercice 1.28. — Montrer que pour tout ensemble profini T, il existe un schéma affine X tel que $\pi_0(X) = T$ comme espace topologique.

Exercice 1.29. — Soit X un schéma. Que peut-on dire du faisceau $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ sur X ?

Pour finir la discussion, il reste à comparer les faisceaux $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}$ avec le faisceau $\underline{\mathbb{Z}}_\ell$, et cela sur le site étale comme sur le site pro-étale. Commençons par définir proprement le faisceau $\underline{\mathbb{Z}}_\ell$. On rappelle que d'après `https://stacks.math.columbia.edu/tag/009E`, toute limite de faisceaux en groupes abéliens se calcule dans la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens (sur tout espace topologique ou même pour toute topologie de Grothendieck). Ainsi si $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ désigne un système projectif de faisceaux en groupes abéliens sur X, pour tout ouvert $U \subset X$ on a

$$(\lim_{i\in I}\mathcal{F}_i)(U) = \lim_{i\in I}(\mathcal{F}_i(U))$$

où la seconde limite est calculée dans la catégorie des groupes abéliens.

Remarque 1.30. — Cet énoncé vaut pour toutes les limites, pas seulement les limites filtrantes. Rappelons que le noyau d'un morphisme de faisceaux en groupes abéliens $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est la limite du diagramme $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ A FINIR et en effet, le préfaisceau $\mathrm{Ker}(f)$ est un faisceau.

Par contre même les colimites filtrantes ne se calculent pas toujours sur les préfaisceaux. Toujours d'après `https://stacks.math.columbia.edu/tag/009E`, cela n'est vrai que sous une hypothèse de quasi-compacité de l'espace.

Et les colimites non filtrantes ne se calculent définitivement pas sur les préfaisceaux. Par exemple si $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux en groupes abéliens, son conoyau est la colimite du diagramme (A FAIRE) dans la catégorie des faisceaux, mais on sait bien que le faisceau $\mathrm{Coker}(f)$ est la faisceautisation du préfaisceau $U \mapsto \mathcal{G}(U)/f(\mathcal{F}(U))$ et que cette faisceautisation est indispensable sur de nombreux exemples.

Lemme 1.31. — *Soit X un schéma. On a l'égalité $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell} = \lim_n(\underline{\mathbb{Z}/\ell^n})$ entre faisceaux sur le site étale de X, où $\underline{\mathbb{Z}/\ell^n} = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}/\ell^n} = \mathcal{F}_{(\mathbb{Z}/\ell^n)_{\mathrm{disc}}}$ est le faisceau constant associé à $\mathbb{Z}/\ell^n$. En particulier quand X est localement noethérien, on a $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell} = \lim_n \underline{\mathbb{Z}}/\ell^n = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}} = \underline{\mathbb{Z}}_\ell$.*

Démonstration. — La première assertion est quasiment évidente : pour tout $Y \to X$ étale on a $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell} = \mathrm{Cont}(U, \mathbb{Z}_\ell)$ et comme les limites de faisceaux se calculent sur les préfaisceaux

$$\begin{aligned}(\lim_n(\underline{\mathbb{Z}/\ell^n}))(Y) &= \lim_n(\underline{\mathbb{Z}/\ell^n})(Y)\\ &= \lim_n \mathrm{Cont}(U, \mathbb{Z}/\ell^n)\\ &= \lim_n \mathrm{Cont}(U, \mathbb{Z}_\ell)\end{aligned}$$

où la dernière égalité est la définition de la topologie ℓ-adique (plus généralement pour tout espace profini $S = \lim_i S_i$ avec S_i fini, pour tout espace topologique Y on a $\mathrm{Cont}(Y, S) = \lim_i \mathrm{Cont}(Y, S_i)$). La seconde assertion résulte du caractère localement connexe de X (voir l'exemple ii de la seconde liste d'exemples). $\square$

Remarque 1.32. — Là encore la morale est claire : le faisceau constant $\underline{\mathbb{Z}}_\ell$ est associé au groupe muni de la topologie discrète $\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}$, et c'est pareil pour tout groupe abélien Λ. Ce faisceau est donc égal à $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}$. Mais $\lim_n \mathbb{Z}/\ell^n$ définit le groupe topologique $\mathbb{Z}_\ell$ muni de sa topologie ℓ-adique. C'est similaire pour les faisceaux et $\lim_n(\underline{\mathbb{Z}/\ell^n}) = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}$.

Pour les schémas usuels qui sont localement noethériens, on ne voit pas la distinction.

Lemme 1.33. — *Soit X un schéma. On a l'égalité $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell} = \lim_n(\underline{\mathbb{Z}/\ell^n})$ entre faisceaux sur le site pro-étale de X, où $\underline{\mathbb{Z}/\ell^n} = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}/\ell^n} = \mathcal{F}_{(\mathbb{Z}/\ell^n)_{\mathrm{disc}}}$ est le faisceau constant associé à $\mathbb{Z}/\ell^n$.*

Démonstration. — Même démonstration que la première assertion du lemme 1.31, qui vaut pour tout site muni d'une opération de faisceautisation. $\square$

Remarque 1.34. — La morale reste claire : même si X est localement noethérien, les schémas du site pro-étale de X ne le sont pas, donc le faisceau constant $\underline{\mathbb{Z}}_\ell = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{\ell,\mathrm{disc}}}$ cesse d'être égal au faisceau limite projective $\lim_n(\underline{\mathbb{Z}/\ell^n}) = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}$. Comme nous l'avons dit, c'est le faisceau $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell}$ qui servira à définir la cohomologie ℓ-adique.