TD1 : Algèbre linéaire

Exercice 1. 1) Vérifier que l'application $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $z_1 \otimes z_2 \mapsto (z_1 z_2, z_1 \bar{z}_2)$ est surjective. Trouver en particulier un antécédant explicite de $(1, 0)$ et de $(0, 1)$.
2) Ecrire explicitement la décomposition de V un $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-module comme produit de deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $V^{1,0}$ et $V^{0,1}$. Y-a t'il une restriction sur les dimensions de $V^{1,0}$ et $V^{0,1}$?

Exercice 2. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Vérifier que la donnée d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur V étendant la $\mathbb{R}$-structure est équivalente à la donnée de $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ vérifiant $I^2 = -\mathrm{Id}_V$.

2. Vérifier que la donnée de deux structures compatibles de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur V est équivalente à la donnée de $I_1, I_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ commutants et tels que $I_1^2 = I_2^2 = -\mathrm{Id}_V$.

3. Vérifier que la donnée de deux structures compatibles de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur V est équivalente à la donnée d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur V et de $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ vérifiant $I^2 = -\mathrm{Id}_V$.

4. On se place dans le contexte de la question 3 (on a donc rompu la symétrie entre les deux structures complexes sur V en en choisissant d'abord une puis en désignant la seconde par I). Montrer l'existences d'une décomposition
$$V = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$$
en produit de deux sous-$\mathbb{C}$-espaces vectoriels, où I agit par homothétie de rapport i sur $V^{1,0}$ et de rapport $-i$ sur $V^{0,1}$. Vérifier que $V^{0,1}$ est engendré par les vecteurs de la forme $u + iI(u)$ pour $u \in V$, et $V^{1,0}$ par ceux de la forme $u - iI(u)$. Y-a t'il des restrictions sur la dimension de $V^{1,0}$ et $V^{0,1}$?

5. Vérifier que cette décomposition est exactement celle fournie par l'exercice **??**.

Exercice 3. Soit W un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $V = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Soit $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$ tel que $I^2 = -\mathrm{Id}_W$. Il induit un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $I \otimes 1$ de V que l'on notera toujours I. Notons $\bullet \mapsto \bar{\bullet}$ l'application $V \to V$, $v \otimes z \mapsto v \otimes \bar{z}$, et pour tout sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel $V' \subset V$, notons $\overline{V'} \subset V$ son image par cette application de conjugaison.
Vérifier que les sous-espaces $V^{1,0}$ et $V^{0,1}$ fournis par la question iv de l'exercice **??** vérifient $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$, et qu'ils sont de même dimension.

Exercice 4. Soit W un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, \mathbb{C})$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$ tel que $I^2 = -\mathrm{Id}_W$. Notons $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ l'endomorphisme transposé de I. On applique l'exercice **??**.iv à (V, I) et l'on obtient des sous-$\mathbb{C}$-espaces vectoriels $V^{1,0}$, $V^{0,1}$ de V. Par ailleurs on note $\bullet \mapsto \bar{\bullet}$ l'application $V \to V$ de post-composition avec la conjugaison complexe $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1. Vérifier que $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$ et que ces espaces sont de même dimension.

2. Utilisons I pour donner à W une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Vérifier que $V^{1,0} \subset V$ consiste en les formes linéaires $W \to \mathbb{C}$ qui sont $\mathbb{C}$-linéaires, et que $V^{1,0} \subset V$ consiste en les formes anti-$\mathbb{C}$-linéaires.

Exercice 5. Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, \mathbb{R})$. On a alors $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, \mathbb{C})$ auquel on peut appliquer l'exercice prédédent pour le décomposer en $V^{1,0} \oplus V^{0,1}$. Soit $V^{1,1} = V^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} V^{0,1} \subset \Lambda^2_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ et $V^{1,1}_{\mathbb{R}} = V^{1,1} \cap \Lambda^2_{\mathbb{R}} V$.

1. Interpréter $V^{1,1}$ et $V^{1,1}_{\mathbb{R}}$ comme certaines formes alternées sur W.

2. Calculer ces espaces lorsque $W = \mathbb{C}^2$.

3. Notons $\mathrm{Herm}(W) \subset \mathrm{Bilin}_{\mathbb{R}}(W \times W, \mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel des formes hermitiennes h qui sont $\mathbb{C}$-linéaires en la première variable, $\mathbb{C}$-antilinéaire en la seconde et telles que $\overline{h(u,v)} = h(v,u)$. Montrer que l'application
$$\mathrm{Herm}(W) \to V^{1,1}_{\mathbb{R}},\ h \mapsto \omega = -\mathfrak{Im}(h)$$
est une bijection.

4. Montrer que l'application $\mathrm{Herm}(W) \ni h \mapsto g = \mathfrak{Re}(h)$ définit une bijection de $\mathrm{Herm}(W)$ vers l'ensemble des formes $\mathbb{R}$-bilinéaires symétriques sur W vérifiant $g(iu, iv) = g(u, v)$.

5. Lorsque $g = \mathfrak{Re}(h)$, vérifier que g est non dégénérée si et seulement si h est non dégénérée.

6. On dit que $\omega = -\mathfrak{Im}(h)$ est positive lorsque h est définie positive. En déduire que dans ce cas W est à la fois munie d'une structure hermitienne, d'une structure euclidienne et d'une structure symplectique.

Exercice 6. Montrer que toute variété différentielle admet une métrique riemanienne. En admet-elle plusieurs ?