TD1

Exercice 1. Considérons l'espace topologique $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Soit $S = (0, 0, -1)$ et $N = (0, 0, 1)$ les pôles sud et nord. On considère les projections stéréographiques qui sont des homéomorphismes

$$\phi_N \ : \ \mathbb{S}^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, (x, y, z) \mapsto \frac{x + iy}{1 - z}$$

$$\phi_S \ : \ \mathbb{S}^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, (x, y, z) \mapsto \frac{x - iy}{1 + z}$$

1. Vérifier que cet atlas muni $\mathbb{S}^2$ d'une structure de surface de Riemann. Quel sont les changements de carte ?

2. Soit $\infty = [1, 0] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et $0 = [0, 1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Construire des homéomorphismes

$$\phi : U = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0\} = \{[X, Y] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \mid Y \neq 0\} \to \mathbb{C}$$

$$\psi : V = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \{[X, Y] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \mid X \neq 0\} \to \mathbb{C}$$

   qui munissent $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ d'une structure de surface de Riemann. Quels sont les changements de carte ?

3. Prouver qu'il existe un isomorphisme de surfaces de Riemann $\mathbb{S}^2 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Exercice 2. Dans cet exercice on utilise systématiquement la carte $(V, \mathbb{C}, \psi)$. Par abus de notation, pour toute fonction f sur $\mathbb{C}$, on notera encore $f = f \circ \psi$ la fonction déduite sur V. Lorsque $f(z) = z$ on obtient donc une fonction notée z sur V.

1. Que vaut $z([X : Y])$? La fonction z est elle méromorphe sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$? Holomorphe ? Quel est son diviseur ?

2. Prouver sans utiliser le théorème de Liouville que toute fonction holomorphe sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est constante. On pourra lire une telle fonction dans les deux cartes.

3. Prouver que $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$, le corps des fractions rationnelles en z.

4. Que vaut $L(k \cdot (\infty))$? Et $L(k \cdot (0))$? Et $L(b \cdot (\infty) - a \cdot (0))$?

5. Soit $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$. Que vaut $L(D)$?

6. En déduire que cet espace est nul si $\deg(D) < 0$ et qu'il est de dimension $\deg(D)+1$ sinon.

7. Prouver que pour tout $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^*$, le diviseur $\mathrm{div}(f)$ est de degré nul.

8. Prouver réciproquement que si D est de degré nul, il existe $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^*$ tel que $D = \mathrm{div}(f)$.

Exercice 3. On note dz l'unique forme différentielle méromorphe sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ qui dans la carte $(V, \mathbb{C}, \psi)$ correspond à la fonction identité $z \mapsto z$.

1. La forme dz est-elle holomorphe sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$? Quel est son diviseur ? Quels sont ses résidus ?

2. Calculer le diviseur de zdz et de dz/z, ainsi que les résidus de ces formes.

3. Prouver que $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^{\mathrm{diff}} = \mathbb{C}(z) \cdot dz$.

4. Prouver que les formes différentielles holomorphes sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sont nulles.

5. Soit ω une forme différentielle méromorphe sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Prouver que $\deg(\mathrm{div}(\omega)) = -2$. En déduire à nouveau que ω ne peut pas être holomorphe.

6. Trouver une preuve algébrique du fait que $\sum_{P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \mathrm{Res}_P(\omega) = 0$ pour tout forme méromorphe ω sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

7. Trouver une preuve analytique de ce même fait. On pourra écrire $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{S}^2$ et appliquer le théorème des résidus.

8. En déduire une nouvelle preuve de $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ pour toute fonction méromorphe f sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Exercice 4. Soit X une surface de Riemann. Prouver que toute fonction méromorphe $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ s'étend par continuité en $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, qui est un morphisme de surfaces de Riemann, puis que cette construction fournit une bijection entre l'ensemble des fonctions méromorphes sur X et l'ensemble des morphismes de surfaces de Riemann de X vers $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.