Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1. On s'intéresse dans cet exercice aux courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$ qui ont beaucoup d'automorphismes.

1) Prouver que $j(\mathbb{Z} + i \cdot \mathbb{Z}) = 1728$ et $j(\mathbb{Z} + e^{2i\pi/3} \cdot \mathbb{Z}) = 0$.
2) Prouver que $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(E)) = 4$ si et seulement si $j(E) = 1728$.
3) Prouver que $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(E)) = 6$ si et seulement si $j(E) = 0$.

Exercice 2.
On s'intéresse dans cet exercice aux équations de Legendre des courbes elliptiques.

1) Montrer que toute courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ admet une équation (non homogène) de la forme $P_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.
2) Montrer que le j-invariant est égal à $2^8 \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2 \cdot (\lambda-1)^2}$.
3) Montrer que l'application $\mathbb{C} - \{0, 1\} \to \mathbb{C}$ qui à $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ associe le j-invariant de la courbe d'équation P_λ est surjective de fibres de cardinal 6 sauf en $j = 0$ où la fibre est de cardinal 2 et en $j = 1728$ où la fibre est de cardinal 3.
4) Calculer $E[2]$ lorsque E est donné par l'équation (non homogène) $P_\lambda = 0$.

Exercice 3. Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ et $\varphi \in \mathrm{Aut}(E)$.

1) Prouver que φ induit un isomorphisme $\varphi_n : E[n] \to E[n]$ pour tout $n \geq 1$.
2) Supposons que $n \geq 3$ et que φ_n est l'identité. Montrer que φ est l'identité.
3) Cela reste-t-il vrai si $n = 2$?
4) Qu'est-ce que cela implique sur $\mathcal{H}/\Gamma(n)$ où $\Gamma(n) = \mathrm{Ker}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ et $n \geq 3$?

Exercice 4. On s'intéresse dans cet exercice aux courbes elliptiques à multiplication complexe. Soit K un corps quadratique imaginaire d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$. Notons h_K le nombre de classe de K, c'est à dire le cardinal du groupe de classe de K, c'est à dire le nombre de classes d'isomorphismes de $\mathcal{O}_K$-modules localement libres de rang un.

1) Prouver qu'à isomorphisme près il y a exactement h_K courbes elliptiques E telles que $\mathrm{End}(E) = \mathcal{O}_K$.
2) Soit E telle que $\mathrm{End}(E) = \mathcal{O}_K$. Prouver que $j(E) \in \bar{\mathbb{Q}}$ et que $[\mathbb{Q}(j(E)) : \mathbb{Q}] \leq h_K$.

Exercice 5. Dans cet exercice on montre que toute surface de Riemann compacte est projective. Soit X une surface de Riemann compacte connexe de genre g et soit $D \in \mathrm{Div}(X)$ un diviseur.

1) Montrer qu'on a pour tout $P \in X$ une suite exacte courte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_X(D - (P)) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_P \to 0$$

2) En déduire que $h^0(D - (P)) = h^0(D)$ ou que $h^0(D - (P)) = h^0(D) - 1$.
3) Interpréter chacun de ces cas selon la valeur des éléments $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ en P.
4) Montrer que si $\deg(D) \geq 2g$ on est dans le cas où $h^0(D - (P)) = h^0(D) - 1$.
5) On suppose désormais $\deg(D) \geq 2g$. Calculer $h^0(D)$.

6) Soit $f_1, \cdots, f_{h^0(D)}$ une $\mathbb{C}$-base de $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)$. Prouver que pour tout $P \in X$ il existe $1 \leq i \leq h^0(D)$ tel que $f_i(P) \neq 0$.
7) En déduire que l'application

$$\varphi : X \to \mathbb{P}^{h^0(D)-1}\ ,\ \ P \mapsto [f_1(P), \cdots, f_{h^0(D)}(P)]$$

est bien définie et holomorphe.
8) De manière plus canonique, construire une application holomorphe

$$\psi \to \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$$

où pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dual $V^\vee$ on note

$$\mathbb{P}(V) = (V^\vee - \{0\})/\mathbb{C}^*\ .$$

9) Prouver que tous $P, Q \in X$ alors $h^0(D - (P) - (Q))$ est égal à $h^0(D)$, à $h^0(D) - 1$ ou à $h^0(D) - 2$.
10) Montrer que si $\deg(D) \geq 2g + 1$ on a $h^0(D - (P) - (Q)) = h^0(D) - 2$.
11) On suppose désormais que $\deg(D) \geq 2g + 1$. En déduire que pour tout $P, Q \in X$ il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ tel que $f(P) = 0$ et $f(Q) \neq 0$.
12) Conclure que φ est injective.
13) Montrer que φ est biholomorphe sur son image.
14) En déduire que X est algébrique.
15) Qu'a-t-on de mieux dans le cas où X est une courbe elliptique ?