TD2 : Calcul différentiel

Exercice 1. Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, \mathbb{R})$. On a alors $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, \mathbb{C})$ auquel on peut appliquer l'exercice prédédent pour le décomposer en $V^{1,0} \oplus V^{0,1}$. Soit $V^{1,1} = V^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} V^{0,1} \subset \Lambda^2_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ et $V^{1,1}_{\mathbb{R}} = V^{1,1} \cap \Lambda^2_{\mathbb{R}} V$.

1. Interpréter $V^{1,1}$ et $V^{1,1}_{\mathbb{R}}$ comme certaines formes alternées sur W.

2. Calculer ces espaces lorsque $W = \mathbb{C}^2$.

3. Notons $\mathrm{Herm}(W) \subset \mathrm{Bilin}_{\mathbb{R}}(W \times W, \mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel des formes hermitiennes h qui sont $\mathbb{C}$-linéaires en la première variable, $\mathbb{C}$-antilinéaire en la seconde et telles que $\overline{h(u,v)} = h(v,u)$. Montrer que l'application

$$\mathrm{Herm}(W) \to V^{1,1}_{\mathbb{R}},\ h \mapsto \omega = -\mathfrak{Im}(h)$$

   est une bijection.

4. Montrer que l'application $\mathrm{Herm}(W) \ni h \mapsto g = \mathfrak{Re}(h)$ définit une bijection de $\mathrm{Herm}(W)$ vers l'ensemble des formes $\mathbb{R}$-bilinéaires symétriques sur W vérifiant $g(iu, iv) = g(u, v)$.

5. Lorsque $g = \mathfrak{Re}(h)$, vérifier que g est non dégénérée si et seulement si h est non dégénérée.

6. On dit que $\omega = -\mathfrak{Im}(h)$ est positive lorsque h est définie positive. En déduire que dans ce cas W est à la fois munie d'une structure hermitienne, d'une structure euclidienne et d'une structure symplectique.

Exercice 2. Calculer $\partial(z \cdot dx)$, $\partial(z \cdot dz)$ et $\bar{\partial}(z_1 \cdot dz_1 \wedge d\bar{z}_2)$.

Exercice 3. Vérifier les points suivants pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$.

1. $\partial(\alpha \wedge \beta) = (\partial\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\partial\beta)$ pour tout $\alpha \in A^k(U)$, $\beta \in A^l(U)$.

2. $\bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) = (\bar{\partial}\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\bar{\partial}\beta)$ pour tout $\alpha \in A^k(U)$, $\beta \in A^l(U)$.

3. $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ et $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$.

Exercice 4. Soient $p \geq 0$, $q > 0$ et α une forme de type (p, q) et de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. Supposons $\bar{\partial}\alpha = 0$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe localement sur U une forme différentielle β de type $(p, q-1)$ et de classe C^1 telle que $\alpha = \bar{\partial}\alpha$.

1. En décomposant α sur la base des $dz_I \wedge d\bar{z}_J$, montrer qu'on peut se ramener au cas où $p = 0$.

2. Soit $f(z_1, \cdots, z_n)$ une fonction de classe C^1 sur U qui est holomorphe en les variables z_l pour tout $l > q$. Montrer qu'il existe localement sur U une fonction g de classe C^1 holomorphe en les variables $z_l, l > q$, telle que $\partial g / \partial \bar{z}_q = f$.

3. Soit $\alpha = \sum_J \alpha_J d\bar{z}_J$ de type $(0, q)$ telle que $\bar{\partial}\alpha = 0$. On va dans les questions suivants raisonner par récurrence sur le plus grand entier k tel qu'il existe J avec $k \in J$ et $\alpha_J \neq 0$. Initialiser la récurrence lorsque $k = q$.

4. Conclure.

Exercice 5. Soit E un fibré vectoriel réel de rang $2r$ sur X.

1. Supposons que E admet une structure de fibré vectoriel complexe. Construire une section J sur X du fibré réel $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ telle que $J^2 = -\mathrm{Id}_E$.

2. Réciproquement à toute telle section J associer une structure de fibré complexe sur E.

3. Si E est un fibré complexe, montrer que le fibré réel sous-jacent au fibré complexe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, X \times \mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, X \times \mathbb{R})$.

Exercice 6. Soient E et F des fibrés vectoriels complexes sur X. Montrer que les fibrés $E \otimes_{\mathbb{C}} F$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E^{\vee_{\mathbb{C}}}, F)$ sont isomorphes.

Exercice 7. Pour tous $r, k \geq 0$ et tout fibré complexe E de rang r, construire un fibré $\Lambda^k_{\mathbb{C}} E$ de rang C_r^k qui mérite le nom de puissance extérieure k-ème de E.

Exercice 8. Soient E et F des fibrés vectoriels complexes sur X. Décrire en termes de cocycles les morphismes de fibrés de E dans F. En déduire par exemple que la construction $E \mapsto E^{\vee_{\mathbb{C}}}$ est fonctorielle contravariante.