TD2

Exercice 1.
On s'intéresse dans cet exercice aux équations de Legendre des courbes elliptiques.

1) Montrer que toute courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ admet une équation (non projective) de la forme $P_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{C} - \{0,1\}$.
2) Montrer que le j-invariant est égal à $2^8 \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2\cdot(\lambda-1)^2}$.
3) Montrer que l'application $\mathbb{C} - \{0,1\} \to \mathbb{C}$ qui à $\lambda \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ associe le j-invariant de la courbe d'équation P_λ est surjective de fibres de cardinal 6 sauf en $j = 0$ où la fibre est de cardinal 2 et en $j = 1728$ où la fibre est de cardinal 3.

Exercice 2. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. On appelle *fonction elliptique* relativement à Λ toute fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui est Λ-périodique. On note $\mathbb{C}(\Lambda)$ le corps des fonctions elliptiques pour Λ.
Pour toute fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et tout $w \in \mathbb{C}$ on note $\mathrm{ord}_w(f) \in \mathbb{Z}$ l'ordre du zéro ou du pôle de f en w et on note $\mathrm{res}_w(f)$ son résidu.

1) Soit $f \in \mathbb{C}(\Lambda)$. Montrer par l'analyse complexe que

$$\sum_{w\in\mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{res}_w(f) = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{w\in\mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_w(f) = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{w\in\mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_w(f)\cdot w \in \Lambda \tag{3}$$

2) Exprimer ces propriétés à l'aide de $\mathrm{Pic}^0(\mathbb{C}/\Lambda)$ et $\mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda)$.
3) Prouver qu'une fonction elliptique a au moins deux pôles (avec multiplicité) dans $\mathbb{C}/\Lambda$ et qu'elle a autant de zéros (avec multiplicités). On appelle ce nombre ≥ 2 l'*ordre* de la fonction elliptique.
4) Montre que $\mathbb{C}(\Lambda) = \mathbb{C}(\wp_\Lambda, \wp'_\Lambda)$ donc que toute fonction elliptique s'écrit comme fraction rationnelle en $\wp_\Lambda$ et $\wp'_\Lambda$. On pourra se ramener à supposer la fonction f paire puis introduire une fonction elliptique $g(z)$ qui est une fraction rationnelle en $\wp_\Lambda(z)$ et qui a exactement les mêmes zéros et pôles que f avec la même multiplicité.
5) On considère la fonction σ de Weierstrass définie par

$$\sigma_\Lambda(z) = z \cdot \prod_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}}$$

Prouver que σ_Λ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec zéros simples en $z \in \Lambda$ et pas d'autres zéros.
6) Prouver que $\frac{d^2 \log \sigma_\Lambda(z)}{dz^2} = -\wp_\Lambda(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} - \Lambda$.
7) Prouver que pour tout $\omega \in \Lambda$ il existe $a_\omega, b_\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\sigma_\Lambda(z+\omega) = e^{a_\omega z + b_\omega} \cdot \sigma_\Lambda(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

8) En déduire la suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}(\Lambda)^* \xrightarrow{\text{div}} \mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow 0$$

puis qu'on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Pic}^0(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathbb{C}/\Lambda$.
9) Prouver que pour tous $z, a \in \mathbb{C} - \Lambda$ on a

$$\wp_\Lambda(z) - \wp_\Lambda(a) \;=\; -\frac{\sigma_\Lambda(z+a) \cdot \sigma_\Lambda(z-a)}{\sigma_\Lambda(z)^2 \cdot \sigma_\Lambda(a)^2}\,.$$

10) Prouver que $\wp'_\Lambda(z) = -\sigma_\Lambda(2z)/\sigma(z)^4$.
11) Prouver que $\sigma_\Lambda(nz)/\sigma(z)^{n^2} \in \mathbb{C}(\Lambda)$ pour tout entier n.

Exercice 3. Soit (ω_1, ω_2) une base de Λ. Posons $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

1) Prouver que $\wp'_\Lambda(\omega_i/2) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.
2) Montrer que les trois nombres $\wp_\Lambda(\omega_i/2)$ sont distincts pour $i = 1, 2, 3$.
3) En déduire que $\Delta(\Lambda) \neq 0$. On a noté $\Delta(\Lambda) = g_2(\Lambda)^3 - 27 g_3(\Lambda)^2$. On pourra faire le lien avec le discriminant de $4x^3 - g_2(\Lambda) \cdot x - g_3(\Lambda)$.
4) Soit C la courbe dans $\mathbb{C}^2$ d'équation $y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda)$. Prouver en utilisant les résultats de l'exercice précédent sur les fonctions elliptiques que le morphisme

$$(\mathbb{C} - \Lambda)/\Lambda \to C,\; z \mapsto (\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z))$$

est surjectif.
5) Prouver de même qu'il est bijectif.