Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$ 3

Exercice 1. Soit E la courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x^3 + ax + b$. Écrire la formule explicite du morphisme $[-1]_E$.

Exercice 2.
On s'intéresse dans cet exercice aux équations de Legendre des courbes elliptiques.

1) Montrer que toute courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ admet une équation (non homogène) de la forme $P_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{C} - \{0,1\}$.
2) Montrer que le j-invariant est égal à $2^8 \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2\cdot(\lambda-1)^2}$.
3) Montrer que l'application $\mathbb{C} - \{0,1\} \to \mathbb{C}$ qui à $\lambda \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ associe le j-invariant de la courbe d'équation P_λ est surjective de fibres de cardinal 6 sauf en $j = 0$ où la fibre est de cardinal 2 et en $j = 1728$ où la fibre est de cardinal 3.
4) Calculer $E[2]$ lorsque E est donné par l'équation (non homogène) $P_\lambda = 0$.

Exercice 3.
On s'intéresse dans cet exercice aux courbes cubiques singulières. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tel que la courbe E définie par l'équation affine $y^2 = x^3 + ax + b$ soit singulière.

1) Dessiner les différentes formes possibles pour E et vérifier que E a un unique point singulier. On notera dans la suite E_{ns} le lieu non singulier de E.
2) Définir une loi interne naturelle sur E_{ns}.
3) Montrer qu'il s'agit d'une loi de groupe.
4) Supposons que E a un noeud. Soit $y = \alpha_1 x + \beta_1$ et $y = \alpha_2 x + \beta_2$ les équations des deux tangentes à E en le point singulier. Notons (x_s, y_s) les coordonnées du point singulier. Montrer que l'application

$$(x, y) \mapsto \frac{y - \alpha_1 x - \beta_1}{y - \alpha_2 x - \beta_2}$$

induit un isomorphisme de groupes $E_{\mathrm{ns}} \simeq (\mathbb{C}^*, *)$.
5) Supposons que E a une pointe. Soit $y = \alpha x + \beta$ l'équation de la tangente à E en le point singulier. Montrer que l'application

$$(x, y) \mapsto \frac{x - x_s}{y - \alpha x - \beta}$$

induit un isomorphisme de groupes $E_{\mathrm{ns}} \simeq (\mathbb{C}, +)$.
6) Que se passe-t-il dans les questions 4 et 5 si E est définie sur $\mathbb{R}$?

Dans les deux dernières questions, on pourra se ramener au cas où l'équation est $y^2 = x^3 + ax$.