TD3 : Fibrés et faisceaux

Exercice 1. Soient E et F des fibrés vectoriels complexes sur X. Montrer que les fibrés $E \otimes_{\mathbb{C}} F$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E^{\vee_{\mathbb{C}}}, F)$ sont isomorphes.

Exercice 2. Pour tous $r, k \geq 0$ et tout fibré complexe E de rang r, construire un fibré $\Lambda^k_{\mathbb{C}} E$ de rang C^k_r qui mérite le nom de puissance extérieure k-ème de E.

Exercice 3. Soient E et F des fibrés vectoriels complexes sur X. Décrire en termes de cocycles les morphismes de fibrés de E dans F. En déduire par exemple que la construction $E \mapsto E^{\vee_{\mathbb{C}}}$ est fonctorielle contravariante.

Exercice 4. Soit X une variété complexe de dimension. On rappelle que son fibré tangent T_X est un fibré vectoriel complexe. Une métrique hermitienne h sur X est la donnée tout $x \in X$ d'une application $h : T_{X,x} \times T_{X,x} \to \mathbb{C}$ qui varie de manière lisse avec x, qui est $\mathbb{R}$-bilinéaire, qui est $\mathbb{C}$-hermitienne (donc $h(zv, w) = zh(v, w)$ et $h(v, zw) = \bar{z}h(v, w)$)) et telle que $h(v, v)$ soit définie positive pour toute section locale v de T_X.

1. Reformuler la définition de métrique hermitienne en utilisant les fibrés vectoriels.
2. Montrer que toute variété complexe admet des métriques hermitiennes. Sont-elles uniques ?
3. Tout fibré vectoriel admet-il des sections lisses sans zéro ? Qu'a-t-on utilisé de spécifique pour construire les métriques hermitiennes ?

Exercice 5. Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X.

1. Donner des exemples de préfaisceaux non séparés.
2. Pour tout $U \subset X$ notons $\mathcal{F}_1(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}_0(U)$ où
$$\mathcal{F}_0(U) = \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \exists U = \cup_{i \in I} U_i\ ,\ s|_{U_i} = 0\ \forall i \in I\}$$
Prouver que $\mathcal{F}_1$ est un préfaisceau séparé.
3. Calculer $\mathcal{F}_1$ pour tout exemple $\mathcal{F}$ comme dans la question i.
4. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de U. Posons
$$A_{\mathcal{U}}(U) = \{(s_i) \in \mathcal{F}_1(U_i) \mid s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}\ \forall i \neq j \in I\}$$
Vérifier que l'ensemble des recouvrements ouverts de U est ordonné, et que les $A_{\mathcal{U}}(U)$ forment un système inductif filtrant ordonné par l'ensemble de ces recouvrements.
5. Vérifier que $\mathcal{F}_f(U) = \lim_{\mathcal{U}} A_{\mathcal{U}}(U)$ définit un faisceau sur X, qu'on appelle le faisceautisé de $\mathcal{F}$.

6. Construire un morphisme de préfaisceau $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_f$.

7. Vérifier que pour tout faisceau $\mathcal{G}$ sur X, on a une bijection naturelle entre l'ensemble des morphismes de préfaisceaux $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ et l'ensemble des morphismes de faisceaux $\mathcal{F}_f \to \mathcal{G}$.

8. Calculer $\mathcal{F}_f$ pour tous les préfaisceaux introduits précédemment qui ne sont pas des faisceaux.

Exercice 6. Soit X un espace topologique et $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X. On dit que f est injectif si $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ est injectif pour tout $x \in X$. De même pour la surjectivité et la bijectivité.

1. Définir un candidat pour le faisceau $\mathrm{Ker}(f)$ et vérifier que c'est bien un faisceau.

2. Vérifier que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est le faisceau nul.

3. Définir un candidat pour le préfaisceau $\mathrm{Im}^{\mathrm{pre}}(f)$ mais montrer par des exemples que ce n'est pas toujours un faisceau.

4. On note désormais $\mathrm{Im}(f)$ le faisceautisé de $\mathrm{Im}^{\mathrm{pre}}(f)$. Vérifier que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{G}$.

5. Supposons que pour tout $U \subset X$, qu'il existe un recouvrement $U = \cup_{i \in I} U_i$ tel que $f_{U_i} : \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{G}(U_i)$ est surjectif. Montrer que f est surjectif.

6. Donner des exemples de morphismes surjectifs de faisceaux.

7. Définir un candidat pour le préfaisceau $\mathrm{Coker}^{\mathrm{pre}}(f)$ mais montrer par des exemples que ce n'est pas toujours un faisceau.

8. On note désormais $\mathrm{Coker}(f)$ le faisceautisé de $\mathrm{Coker}^{\mathrm{pre}}(f)$. Vérifier que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Coker}(f) = 0$.

Exercice 7. On dit qu'un polynôme non homogène $f \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$ est lisse si le système d'équations $f = \partial f/\partial z_1 = \cdots = \partial f/\partial z_n = 0$ est sans solution dans $\mathbb{C}^n$.
Soit $F \in \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ homogène. On dit que F est lisse dans le sens homogène si le système d'équation $F = \partial F/\partial X_0 = \cdots = \partial F/\partial X_n = 0$ n'a pas de solution $(z_0, \cdots, z_n) \neq (0, \cdots, 0)$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

1. Montrer que si $f \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$ est lisse, son lieu d'annulation $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}^n$ est une variété complexe. *On pourra utiliser une version holomorphe du théorème des fonctions implicites.*

2. Soit $F \in \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ homogène de degré d. Montrer la formule d'Euler

$$F = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{n} X_i \cdot \partial F/\partial X_i$$

3. En déduire que F est lisse dans le sens homogène si et seulement si ses déshomogénisations $f(z_1, \cdots, z_n) = F(1, z_1, \cdots, z_n)$ (et idem pour toute permutation des variables) sont lisses dans le sens usuel.

4. En déduire que si F est lisse dans le sens homogène, son lieu d'annulation $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est une variété complexe.