TD3

Exercice 1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On note $z = x + iy \in U$ les coordonnées des points. Si $f(x, y)$ est C^∞ sur U, on note $\partial f/\partial z = \frac{1}{2}(\partial f/\partial x - i\partial f/\partial y)$ et $\partial f/\partial \bar{z} = \frac{1}{2}(\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y)$.

1. Pourquoi ces signes étranges dans la définition de $\partial f/\partial z$ et de $\partial f/\partial \bar{z}$ ainsi que les facteurs 1/2 ?
2. Montrer que f est holomorphe si et seulement si $\partial f/\partial \bar{z} = 0$.
3. En déduire qu'une 1-forme ω holomorphe sur une surface de Riemann vérifie $d\omega = 0$.
4. Finir la démonstration du théorème des résidus.

Exercice 2. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de surfaces de Riemann compactes, $P \in X$ et $Q = \phi(P)$.

1. Soit g une fonction méromorphe sur Y et $f = g \circ \phi$. Relier $\mathrm{ord}_P(f)$ et $\mathrm{ord}_Q(g)$. Cela est-il compatible avec le degré du diviseur de f et de g ?
2. Soit ω une forme différentielle méromorphe sur Y et $\eta = \phi^*(\omega)$. Relier $\mathrm{ord}_P(\eta)$ et $\mathrm{ord}_Q(\omega)$.
3. En déduire une démonstration de la formule de Riemann-Hurwitz si on sait qu'il existe des formes différentielles méromorphes sur les surfaces de Riemann compactes, et que leur diviseur est de degré $2g - 2$.

Exercice 3. Si $\mathcal{M}(X) \neq \mathbb{C}$, montrer que X est triangularisable.

Exercice 4. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de surfaces de Riemann compactes. Prouver la formule de Riemann-Hurwitz en utilisant la définition du genre via la caractéristique d'Euler des triangulations, et en tirant de Y à X une triangulation convenable de Y.

Exercice 5. Soit $f \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme lisse irréductible et $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ la courbe algébrique qu'il définit. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x$. Montrer que $P = (x_0, y_0)$ est un point de ramification de f si et seulement si $\partial f/\partial y(P) = 0$, et que $mult_P(f) = 1 + ord_P(\partial f/\partial y)$.