TD4 : Sous-variétés et cohomologie

Exercice 1. On dit qu'un polynôme non homogène $f \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$ est lisse si le système d'équations $f = \partial f/\partial z_1 = \cdots = \partial f/\partial z_n = 0$ est sans solution dans $\mathbb{C}^n$.
Soit $F \in \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ homogène. On dit que F est lisse dans le sens homogène si le système d'équation $F = \partial F/\partial X_0 = \cdots = \partial F/\partial X_n = 0$ n'a pas de solution $(z_0, \cdots, z_n) \neq (0, \cdots, 0)$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

1. Montrer que si $f \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$ est lisse, son lieu d'annulation $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}^n$ est une variété complexe. *On pourra utiliser une version holomorphe du théorème des fonctions implicites.*

2. Soit $F \in \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ homogène de degré d. Montrer la formule d'Euler
$$F = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{n} X_i \cdot \partial F/\partial X_i$$

3. En déduire que F est lisse dans le sens homogène si et seulement si ses déshomogénisations $f(z_1, \cdots, z_n) = F(1, z_1, \cdots, z_n)$ (et idem pour toute permutation des variables) sont lisses dans le sens usuel.

4. En déduire que si F est lisse dans le sens homogène, son lieu d'annulation $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est une variété complexe.

Exercice 2. Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et D un diviseur de degré d et de support $S \subset X$. Notons $\mathcal{O}_X(D)$ le faisceau des fonctions méromorphes de diviseur $\geq -D$.

1. Montrer que $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie pour tout D. On notera $h^0(D)$ sa dimension.

2. Montrer que si $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, alors il en est de même pour $H^1(X, \mathcal{O}_X(D)$ pour tout D. On notera $h^1(D)$ sa dimension.

3. Montrer que $H^k(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$ pour tout $k \geq 2$ et tout D.

4. Prouver que $h^0(D) - h^1(D) = 1 - g + \deg(D)$ pour tout D. *On rappelle le théorème de Riemann-Roch, qui garantit qu'il existe un diviseur K tel que $h^1(D) = h^0(K - D)$ pour tout D.*

5. Montrer que $h^0(D) = 0$ pour tout D de degré < 0, et $h^1(D) = 0$ pour tout D de degré $> 2g - 2$.

6. Si $deg(D) > 2g - 1$, montrer que pour tout $P \notin S$, il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ non nulle en P.

7. Si $deg(D) > 2g - 1$, soit $f_0, \cdots, f_r$ une base de $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$. Utiliser cette base et la question précédente pour construire un morphisme $\phi_D : X - S \to \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$.

8. Prouver que ϕ_D se prolonge canoniquement à X. Pour fabriquer ce prolongement, on considèrera une fonction définie au voisinage de P dans X et qui s'annule à l'ordre 1 en P. On prouvera que ϕ_D ne dépend pas de ce choix.

9. Si $deg(D) > 2g$ et P et Q ne sont pas dans le support de D, prouver qu'il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ nulle en P mais pas en Q.

10. En déduire que ϕ_D est injectif.

11. Prouver que cette injection est une immersion. En déduire que X est isomorphe à une sous-variété complexe d'un espace projectif.

12. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Notons $\mathbb{P}(V)$ la variété des hyperplans de V. Construire un morphisme $\phi_D : X \to \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ qui ne dépend d'aucun choix de base.

Exercice 3. Soit X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau flasque sur X.

1. Montrer qu'il existe un faisceau injectif flasque $\mathcal{I}$ et une injection $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}$. On notera $\mathcal{G} = \mathcal{I}/\mathcal{F}$ le faisceau quotient.

2. Montrer que pour tout ouvert $U \subset X$ n la flèche $\mathcal{I}(U) \to \mathcal{G}(U)$ est surjective.
Si $V, W \subset U$ sont deux ouverts tels que $s \in \mathcal{G}(U)$ se relève en $t \in \mathcal{I}(V)$ et $t' \in \mathcal{I}(W)$, on pourra étudier $t - t'$ pour montrer que s se relève dans $\mathcal{I}(V \cup W)$.

3. Montrer que $\mathcal{G}$ est flasque.

4. Conclure.