TD4

Exercice 1. Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et D un diviseur de degré d et de support $S \subset X$. Notons $r = h^0(D) - 1$.

1. Si $d > 2g - 1$, rappeler la construction d'un morphisme $\phi_D : X - S \to \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ qui dépend du choix d'une base de $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.

2. Prouver que ϕ_D se prolonge canoniquement à X. Pour fabriquer ce prolongement, on considèrera une fonction définie au voisinage de P dans X et qui s'annule à l'ordre 1 en P. On prouvera que ϕ_D ne dépend pas de ce choix.

3. Si $d > 2g$ et P et Q ne sont pas dans le support de D, prouver qu'il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ nulle en P mais pas en Q.

4. En déduire que ϕ_D est injectif.

5. Prouver que cette injection est une immersion. En déduire que X est isomorphe à une sous-variété complexe d'un espace projectif.

6. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Notons $\mathbb{P}(V)$ la variété des hyperplans de V. Construire un morphisme $\phi_D : X \to \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ qui ne dépend d'aucun choix de base.

Exercice 2. Considérons l'isomorphisme $\Phi : \mathbb{C}/\Lambda \to C_\Lambda^{\text{proj}}$ construit dans le cours, de réciproque notée Ψ. On note $P \boxplus Q = \Phi(\Psi(P) + \Psi(Q))$ qui fournit une application $C_\Lambda^{\text{proj}} \times C_\Lambda^{\text{proj}} \to C_\Lambda^{\text{proj}}$.

1. Vérifier que $\boxplus$ est une loi de groupe abélien sur C_Λ^{proj} de neutre $\infty = [0 : 1 : 0]$.

2. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}/\Lambda$. Vérifier que l'espace des $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ telle que $\text{div}(f) \geq -(z_1) - (z_2) + (0)$ est de dimension 1. En déduire que toutes ces fonctions s'annulent en $z_1 + z_2$.

3. Soit $P, Q \in C_\Lambda^{\text{proj}}$. Notons Δ la droite projective reliant P et Q, et notons R le troisième point d'intersection de C_Λ^{proj} et de Δ. Soit $g \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ homogène de degré un donnant l'équation de Δ. Montrer que $\text{div}(g/Z) = (P) + (Q) + (R) - 3(\infty)$.

4. Soit Δ' la droite projective reliant R et ∞. Notons S le troisième point d'intersection de C_Λ^{proj} et de Δ'. Soit $h \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ homogène de degré un donnant l'équation de Δ'. Montrer que $\text{div}(h/Z) = (R) + (S) - 2(\infty)$.

5. Quelle est la dimension de l'espace des fonctions méromorphes sur C_Λ^{proj} de diviseur $\geq -(P) - (Q) + (\infty)$? Montrer que S est un zéro de toute telle fonction.

6. En déduire $P \boxplus Q = S$.

Exercice 3. Soit $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ une suite exacte courte de faisceaux en groupes abéliens sur un espace topologique X.

1. Prouver que $\mathcal{F}_1(X)$ s'injecte dans $\mathcal{F}_2(X)$.
2. Prouver que l'image de $\mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{F}_2(X)$ est égale au noyau de $\mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_3(X)$.
3. Pourquoi ne peut-on pas prouver de la même manière que $\mathcal{F}_2(X)$ se surjecte sur $\mathcal{F}_3(X)$?