Feuille d'exercices n^o 5

Exercice 1. Soit k un corps et ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k. Soient E_1, E_2 deux courbes elliptiques. Notons $T_\ell(E_i)$ la limite projective sur n de $E_i[\ell^n](\bar{k})$. C'est un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell^2$ appelé module de Tate ℓ-adique de E_i.

1. Montrer que $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion.
2. Définir un morphisme $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(E_1), T_\ell(E_2))$, $f \mapsto f_\ell$.
3. Si $f_\ell = 0$ montrer que $E_1[\ell^n](\bar{k}) \subset \mathrm{Ker}(f)$ pour tout $n \geq 1$.
4. En déduire que $f \mapsto f_\ell$ est injective.

Exercice 2. Soit k un corps et E une courbe elliptique sur k. On va classifier les différentes algèbres d'endomorphismes possibles. Soit R une $\mathbb{Q}$-algèbre sans diviseur de zéro, de dimension ≤ 4 comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, muni d'une anti-involution $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ telle que $\widehat{\alpha + \beta} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$, $\widehat{\alpha \cdot \beta} = \hat{\beta} \cdot \hat{\alpha}$, $\hat{\hat{\alpha}} = \alpha$, $\hat{\alpha} = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{Q} \subset R$, $\alpha \cdot \hat{\alpha} \in \mathbb{Q}^+$ et $\alpha \cdot \hat{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$.

1. Montrer que si on pose $R = \mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ on obtient une algèbre du type précédent.
2. Soit R une algèbre du type précédent. Notons $N(\alpha) = \alpha \cdot \hat{\alpha}$ et $T(\alpha) = \alpha + \hat{\alpha}$. Montrer que $T(\alpha) = 1 + N(\alpha) - N(\alpha - 1)$ et en déduire $T(\alpha) \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $T : R \to \mathbb{Q}$ est une forme $\mathbb{Q}$-linéaire.
4. Soit $\alpha \neq 0$ un élément de R tel que $T(\alpha) = 0$. Montrer $\alpha^2 \in \mathbb{Q}^*$ et $\alpha^2 < 0$.
5. Si $R \neq \mathbb{Q}$, montrer qu'il existe $\alpha \in R$ tel que $T(\alpha) = 0$ et que $\mathbb{Q}(\alpha)$ soit un corps quadratique imaginaire.
6. Supposons désormais que $R \neq \mathbb{Q}(\alpha)$. Soit $\beta \in R - \mathbb{Q}(\alpha)$. Montrer que quitte à changer β on peut supposer $T(\beta) = T(\alpha\beta) = 0$.
7. En déduire $\beta^2 \in \mathbb{Q}^*$ et $\beta^2 < 0$.
8. Montrer que $\alpha \cdot \beta = -\beta \cdot \alpha$.
9. Montrer que $1, \alpha, \beta$ et $\alpha \cdot \beta$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
10. En déduire que R est égal à $\mathbb{Q}$, à un corps quadratique imaginaire ou à une algèbre de quaternions.
11. Si $\mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est une algèbre de quaternions, montrer que $R \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ pour tout nombre premier ℓ différent de la caractéristique de k.