TD5 : Formes harmoniques

Exercice 1. Soit X un espace Stein.

1. En utilisant la suite exacte courte exponentielle pour les fonctions holomorphes, associer à tout fibré en droites holomorphes E sur X un élément $c_1(E) \in H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}_X)$ qui s'annule si et seulement si E est holomorphiquement trivial.

2. Notons $\mathcal{C}$ le faisceau des fonctions continues à valeurs complexes sur X. Montrer que $H^1(X, \mathcal{C}^*) = H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}_X)$.

3. En déduire la preuve du principe d'Oka, qui affirme que tout fibré topologique complexe admet une unique structure holomorphe à isomorphisme près.

Exercice 2. Soit X une variété différentielle compacte de dimension réelle n. On considère la cohomologie de de Rham à coefficients réel. Soit $k \geq 0$.

1. Montrer que l'application $H^k_{dR}(X) \otimes H^{n-k}_{dR} \to \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$ est bien définie, et qu'elle induite une application $H^k_{dR}(X) \to (H^{n-k}_{dR})^\vee$, où $\vee$ désigne le dual comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que $*$ commute à Δ_d.

3. Montrer que $* : \mathcal{H}^k_d \to \mathcal{H}^{n-k}_d$ est un isomorphisme.

4. En déduire que $H^k_{dR}(X) = (H^{n-k}_{dR})^\vee$.

Exercice 3. Soit X une variété complexe compacte de dimension complexe n. Soit $p, q \geq 0$. Adapter l'exercice précédent pour prouver l'existence d'une dualité canonique entre les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie $H^q(X, \Omega^p_X)$ et $H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}_X)$.